Matematica

Funzioni

Autore: prof. *Pappalardo Vincenzo*

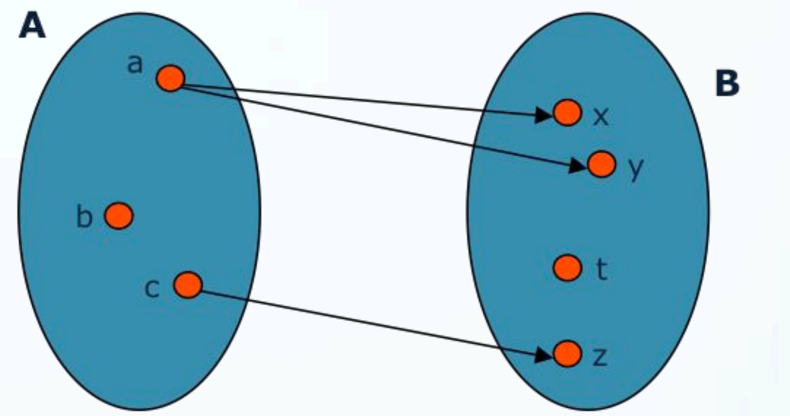
docente di Matematica e Fisica

Le Funzioni e loro caratteristiche

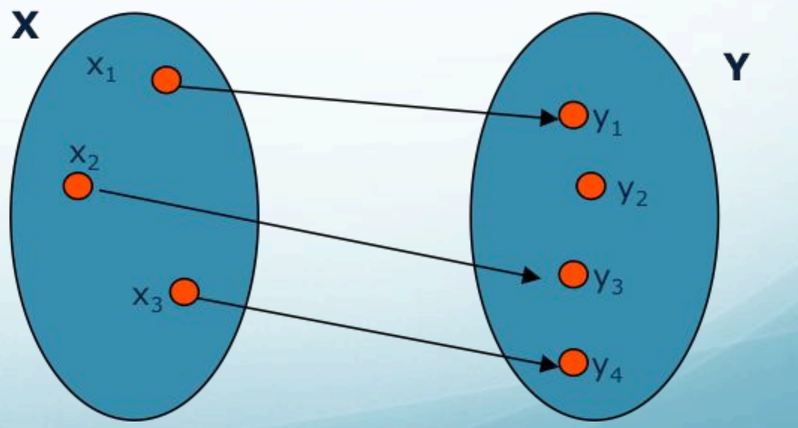
L' analisi di diversi fenomeni della natura o la risoluzione di problemi tecnici o matematici, conduce a considerare la variazione di una grandezza in corrispondenza di un'altra grandezza, cioè lo studio di funzioni.

Relazioni e funzioni

Dati due insiemi A e B, si definisce RELAZIONE una legge che associa a qualche elemento di A uno o più elementi di B.



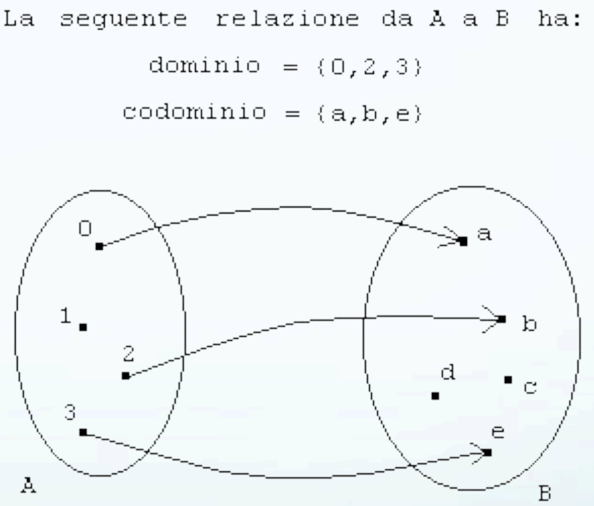
Una **FUNZIONE** è una particolare relazione fra due insiemi X e Y tale che ad ogni elemento x di X associa uno ed un solo elemento y di Y.



Poiché una funzione fa corrispondere ad ogni elemento di X un unico elemento di Y, essa viene anche chiamata corrispondenza univoca.

L'elemento y è detto immagine di x mediante la funzione f.

L'insieme di partenza X è detto dominio della funzione; il sottoinsieme di Y formato dalle immagini degli elementi di X è detto codominio.



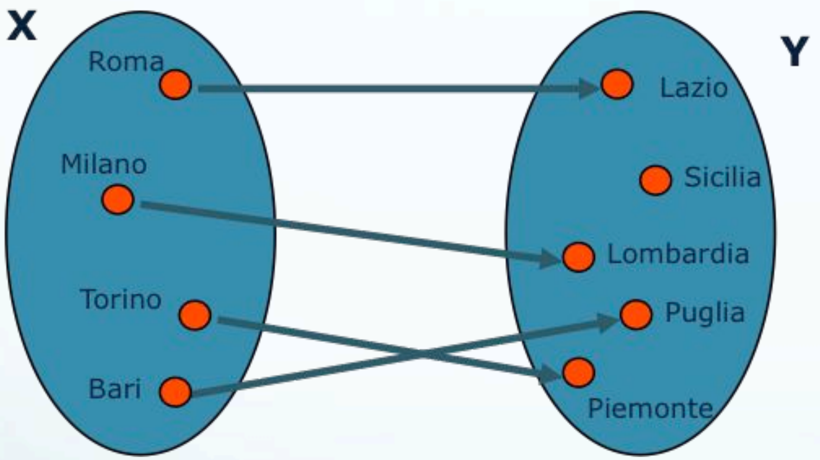
Una funzione si indica nel seguente modo: $y = f(x)$

Oppure: $f : X \to Y$ $\quad X \xrightarrow{f} Y$

Esempio

Consideriamo gli insiemi:

$X = \{Roma, Milano, Torino, Bari\}$ $\quad Y = \{Sicilia, Piemonte, Lombardia, Lazio, Puglia\}$



- Per ogni elemento di X esiste un solo elemento di Y associato
- Tale elemento di B è unico

Pertanto la relazione tra l'insieme X e l'insieme Y è una funzione

Funzioni numeriche

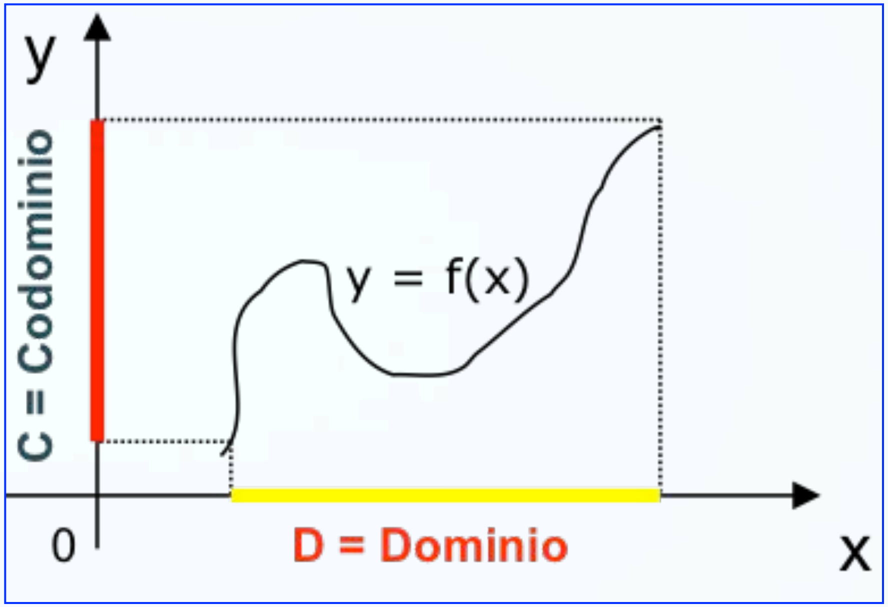
Quando i due insiemi X e Y sono numerici, le funzioni vengono dette funzioni numeriche, e saranno descritte mediante un'espressione analitica. Per esempio le seguenti espressioni analitiche sono funzioni numeriche:

$$y = 3x^3 - 1 \qquad y = \frac{4x^2 + 3}{x - 1} \qquad y = \sqrt{\frac{2x - 3}{5x^3 + 1}}$$

$$y = \frac{e^{x-1} + 2}{\operatorname{sen} x} \qquad y = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)$$

Il valore che assume y dipende da quello attribuito alla x. Per questa ragione, y si chiama variabile dipendente e la x variabile indipendente.

Il DOMINIO è l'insieme dei valori assunti dalla variabile indipendente x, mentre quelli assunti dalla variabile dipendente y si chiama CODOMINIO.



Il CAMPO DI ESISTENZA di una funzione y = f(x) è l'insieme dei valori reali delle x che rendono reale la funzione.

Ad ogni funzione corrisponde sempre un GRAFICO.

La procedura completa per determinare il grafico di una funzione, sarà acquisita attraverso l'analisi matematica (che farete al quinto anno).

Esercizi

Determinare dominio e codominio della seguente funzione:

$y=x^2-4x+2$

Il dominio di una funzione intera è:

$$D = \Re \xrightarrow{oppure} D =]-\infty;+\infty[$$

Per determinare il codominio, procediamo come segue:

- esplicitiamo la funzione rispetto a x:

$$x^2 - 4x + 2 - y = 0$$

- ricaviamo la x:

$$\Delta = 4 - (2 - y) = 2 + y \qquad x = 2 \pm \sqrt{2 + y}$$

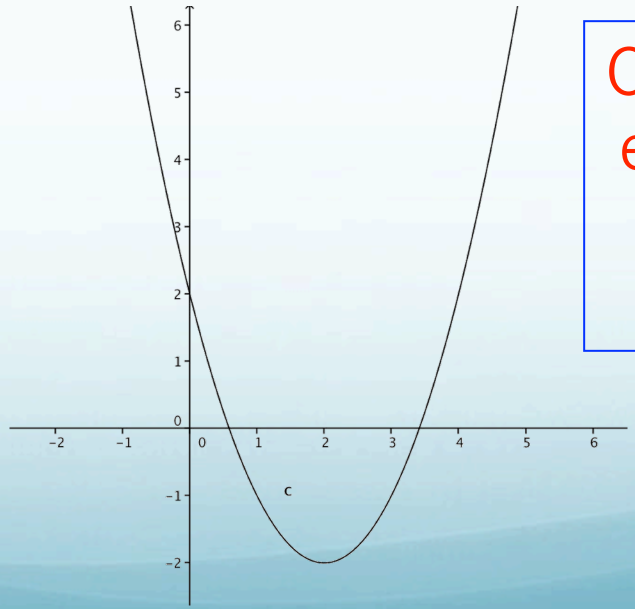
Abbiamo così ottenuto una nuova funzione (chiamata funzione inversa), dove x è espresso in funzione di y. Il dominio di questa nuova funzione sarà il codominio della funzione di partenza.

Essendo la funzione inversa una funzione irrazionale, il suo dominio è dato da:

$$2+y\geq 0 \;\rightarrow\; y\geq -2$$

Il codominio è pertanto l'insieme:

$$C=\left[-2;+\infty\right[$$



Osserva il dominio e il codominio sul grafico della funzione

Determinare dominio e codominio della seguente funzione:

$$y = \frac{2x-1}{x^2+5x+6}$$

Il dominio di una funzione fratta è:

$$x^2+5x+6 \neq 0 \;\rightarrow\; x_1 \neq -2 \vee x_2 \neq -3$$

$$\boxed{D = \{x \in \Re : x \neq -2 \vee x \neq -3\} \xrightarrow{oppure} D = \left]-\infty;-3\right[\vee \left]-3;-2\right[\vee \left]-2;+\infty\right[}$$

Per determinare il codominio, procediamo come segue:

- esplicitiamo la funzione rispetto a x:

$$y(x^2+5x+6) = 2x-1$$

$$yx^2 + x(5y-2) + 6y + 1 = 0$$

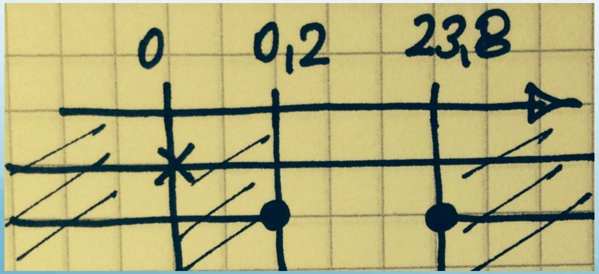
- ricaviamo la x:

$$x_{1,2}=\frac{-(5y-2)\mp\sqrt{(5y-2)^2-4y(6y+1)}}{2y}=\frac{2-5y\mp\sqrt{y^2-24y+4}}{2y}$$

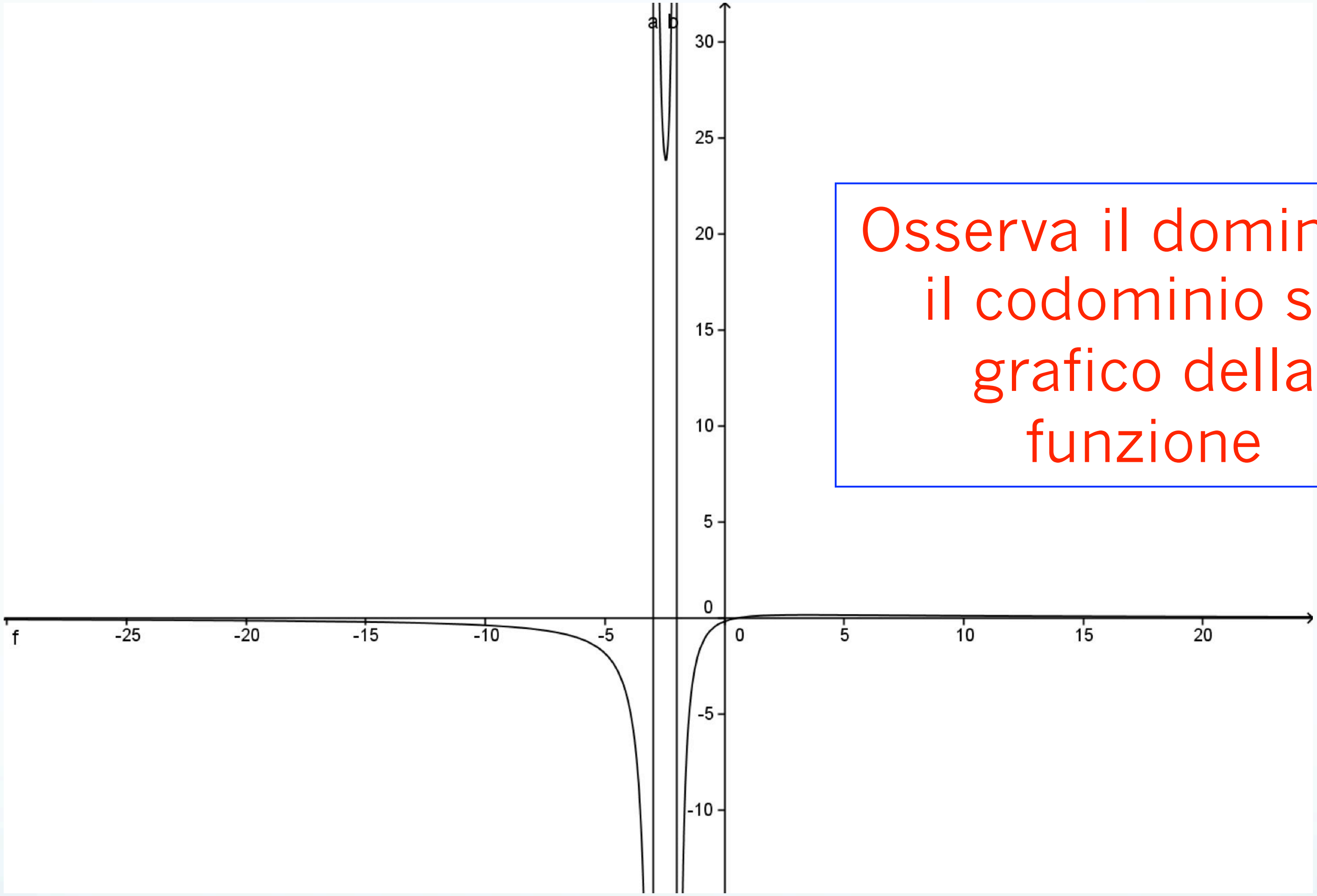
Abbiamo così ottenuto una nuova funzione (chiamata funzione inversa), dove x è espresso in funzione di y.

Il dominio di questa nuova funzione sarà il codominio della funzione di partenza.

$$\begin{cases} y\neq 0 \\ y^2-24y+4\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ y\leq 12-\sqrt{140}\ \vee\ y\geq 12+\sqrt{140} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ y\leq 0,2\ \vee\ y\geq 23,8 \end{cases}$$



$$\boxed{C=\left]-\infty;0\right[\ \vee\ \left]0;0,2\right]\ \vee\ \left[23,8;+\infty\right[}$$



Osserva il dominio e il codominio sul grafico della funzione

$$D = \{x \in \Re : x \neq -2 \vee x \neq -3\} \xrightarrow{oppure} D =]-\infty;-3[\vee]-3;-2[\vee]-2;+\infty[$$

$$C =]-\infty;0[\vee]0;0,2] \vee [23,8;+\infty[$$

Domini delle principali funzioni	
Funzione	**Dominio**
Funzioni razionali intere: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$
Funzioni irrazionali: $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } n \text{ è pari} \\ \text{dominio di } f(x), \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Domini delle principali funzioni	
Funzioni logaritmiche: $y = \log_a f(x) \qquad a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali: $y = a^{f(x)} \qquad a > 0, a \neq 1$ $y = f(x)^{g(x)}$	dominio di $f(x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$

Domini delle principali funzioni	
Funzioni potenza $y = f(x)^{\alpha}$:	
α intero positivo	dominio di $f(x)$
α intero negativo	dominio di $f(x)$ ma con $f(x) \neq 0$
α razionale	dominio delle funzioni irrazionali
α irrazionale positivo	$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \geq 0\right\}$
Funzioni goniometriche:	
$y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$
$y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$	$[-1; 1]$
$y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$

Funzioni numeriche

FUNZIONI ALGEBRICHE: sono quelle funzioni che contengono soltanto le quattro operazioni, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice.

$$y = 3x^3 - 1 \quad (razionale\ intera)$$

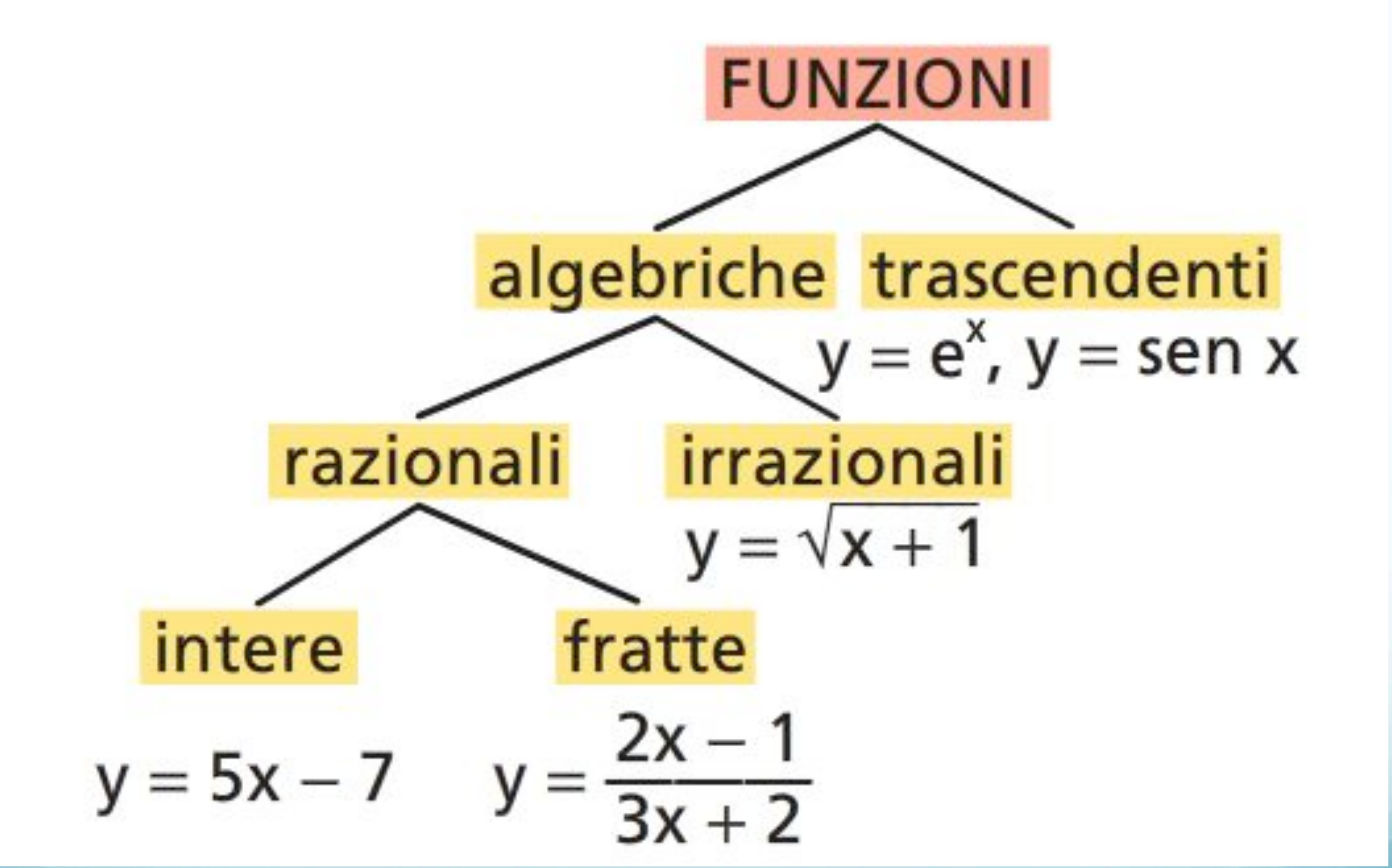
$$y = \frac{4x^2 + 3}{x - 1} \quad (razionale\ \ fratta)$$

$$y = \sqrt{\frac{2x - 3}{5x^3 + 1}} \quad (irrazionale\ \ fratta)$$

FUNZIONI TRASCENDENTI: sono le funzioni non algebriche, come le funzioni trigonometriche , esponenziali e logaritmiche.

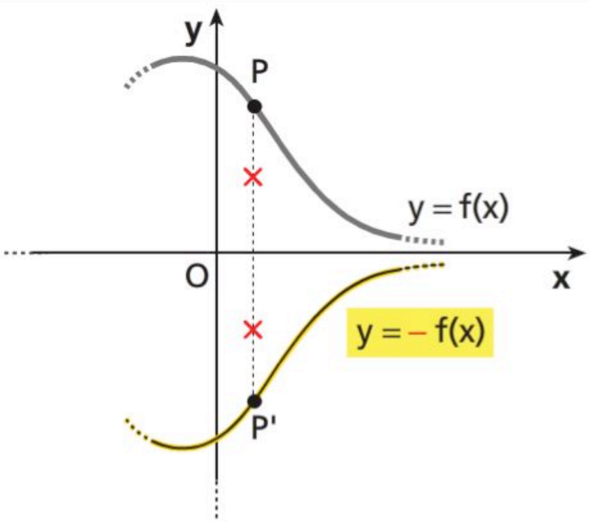
$$y = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)$$

$$y = \frac{e^{x-1} + 2}{\operatorname{sen} x}$$

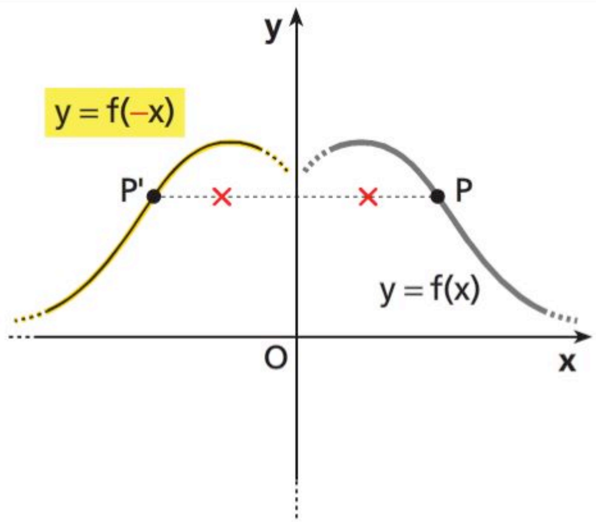

FUNZIONI
algebriche
trascendenti
$y = e^x$, $y = \text{sen}\, x$
razionali
irrazionali
$y = \sqrt{x + 1}$
intere
fratte
$y = 5x - 7$
$y = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

Grafici di funzioni e trasformazioni geometriche

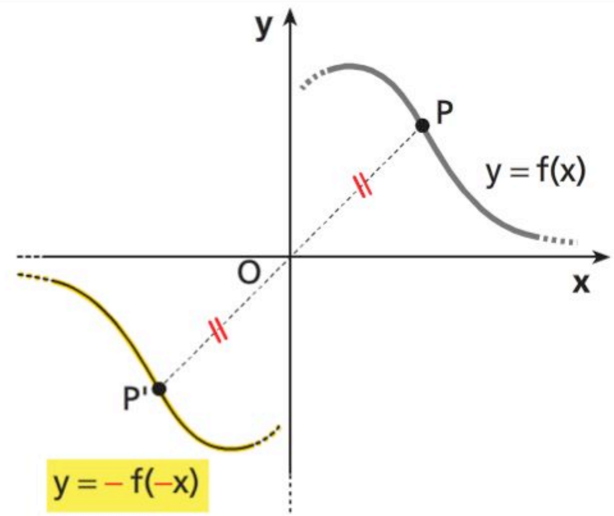
Le simmetrie



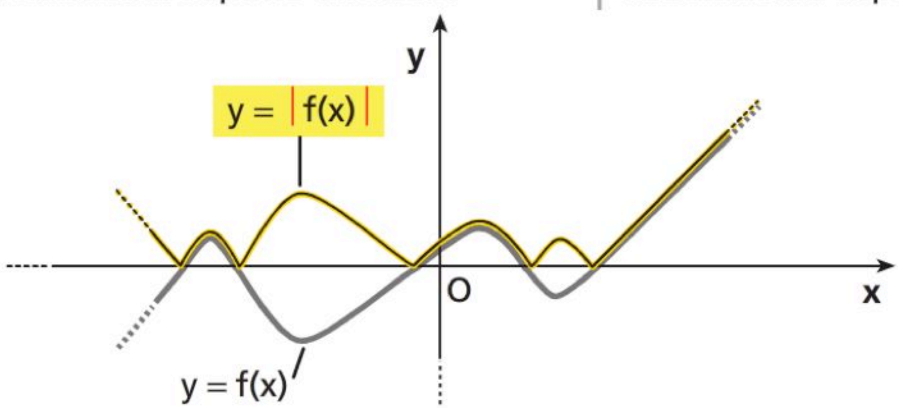
a. Simmetria rispetto all'asse *x*.



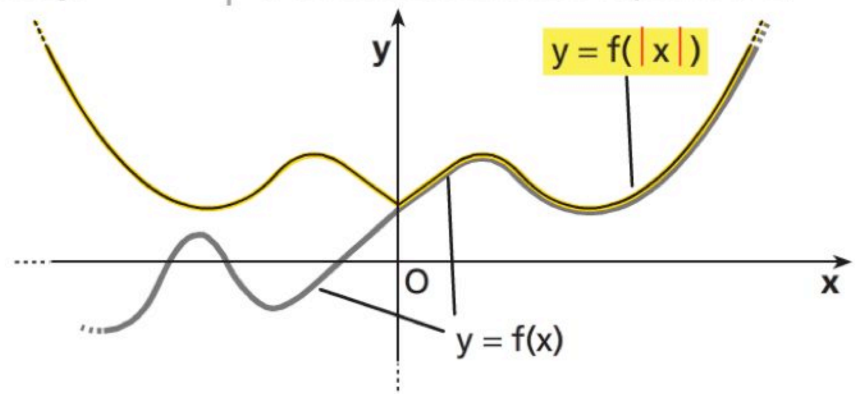
b. Simmetria rispetto all'asse *y*.



c. Simmetria centrale rispetto a *O*.

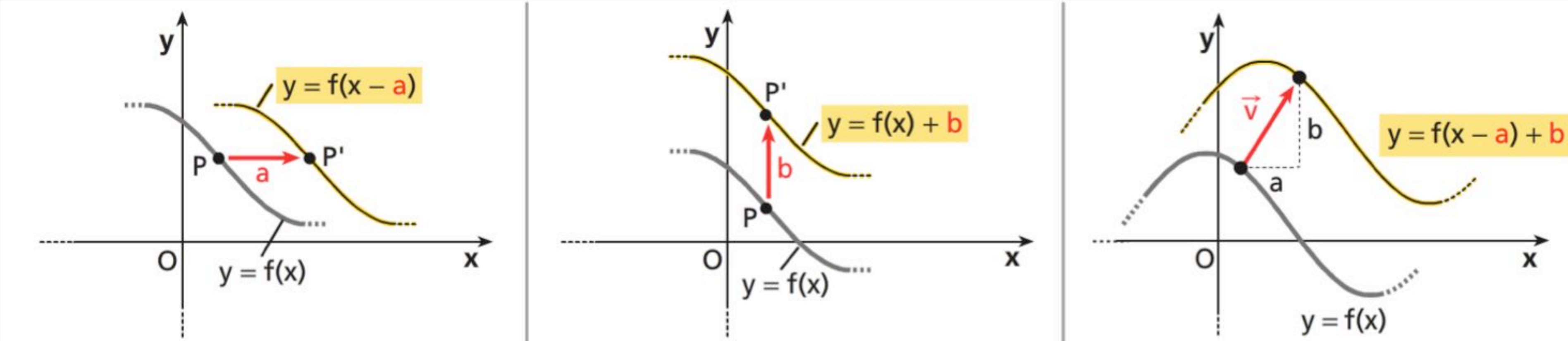


d. Il grafico di $|f(x)|$, se $f(x) \geq 0$, è lo stesso di $f(x)$; se $f(x) < 0$, è simmetrico rispetto all'asse *x* di quello di $f(x)$.



e. Per $x \geq 0$ il grafico è lo stesso di $y = f(x)$, per $x < 0$ il grafico è il simmetrico rispetto all'asse *y* di quello che $y = f(x)$ ha per $x > 0$.

Le traslazioni

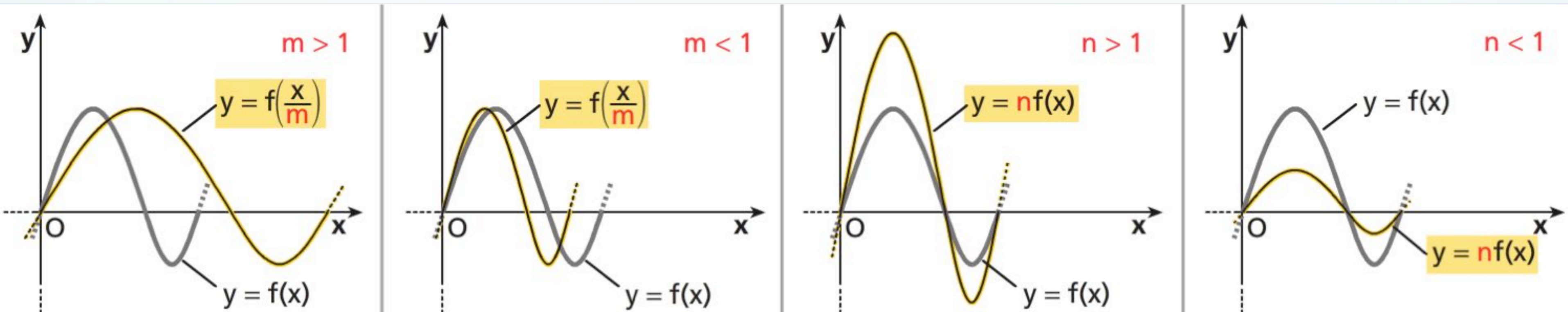


a. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; 0)$ parallelo all'asse *x*.

b. Traslazione di vettore $\vec{v}(0; b)$ parallelo all'asse *y*.

c. Traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$.

Le dilatazioni



a. Dilatazione orizzontale.

b. Contrazione orizzontale.

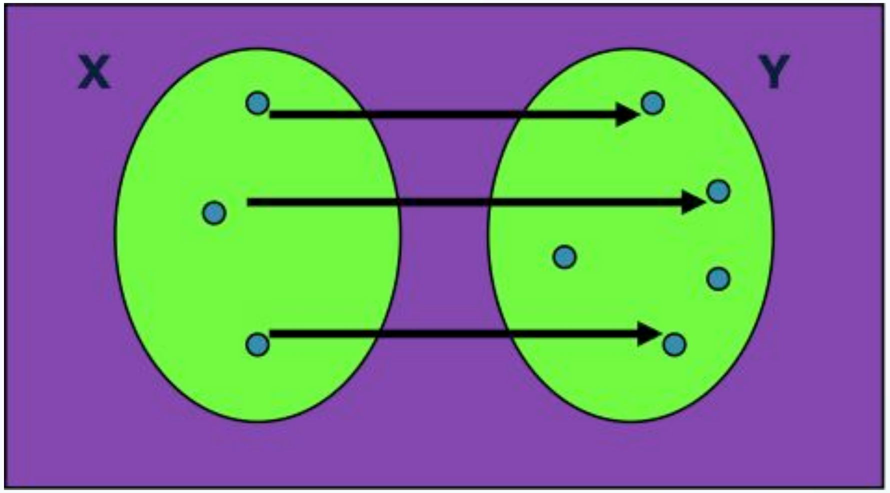
c. Dilatazione verticale.

d. Contrazione verticale.

Le proprietà delle funzioni e la loro composizione

Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

DEFINIZIONE – Una funzione da X a Y si dice **INIETTIVA** se ogni elemento di Y è immagine di al più un elemento di X.



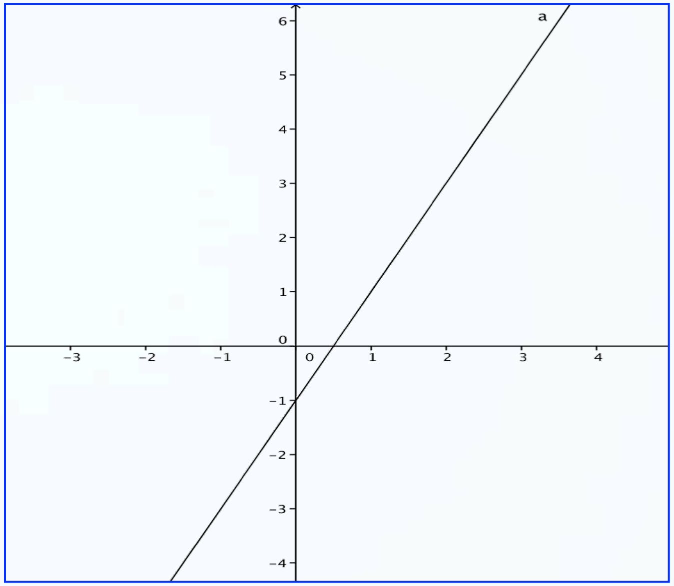
Se una funzione è iniettiva, a due elementi distinti del dominio non corrisponde mai lo stesso elemento del codominio:

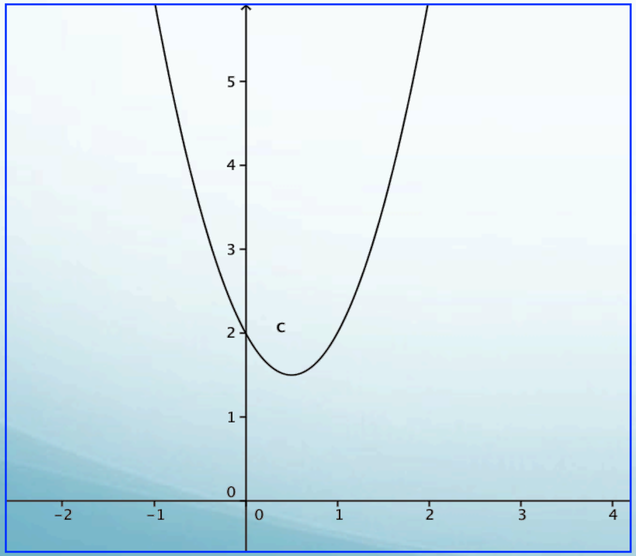
$$\forall (x_1, x_2) \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esempio

$$y = 2x - 1 \Rightarrow \quad \textit{funzione iniettiva}$$

Perché ogni valore di y proviene da un solo valore di x.





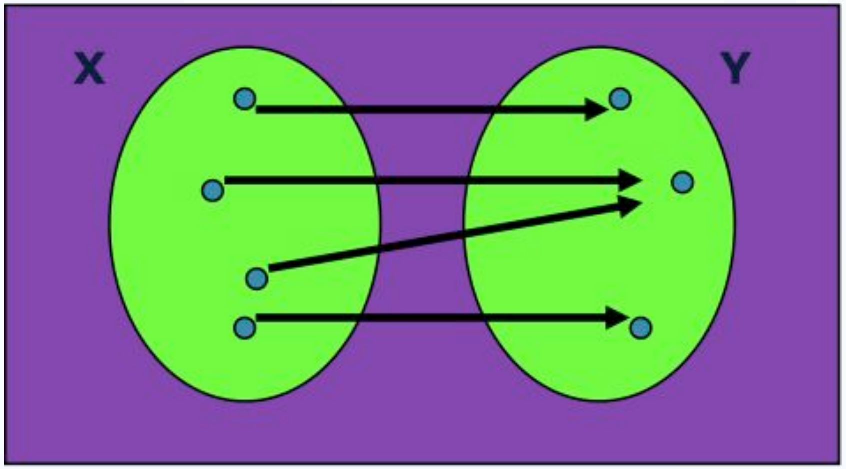
$$y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \quad \textit{funzione non iniettiva}$$

Perché ci sono valori di y che sono immagine di due valori distinti della x. Infatti, sostituendo y=5 nella funzione, otteniamo:

$x^2 - 2x + 2 = 5 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$

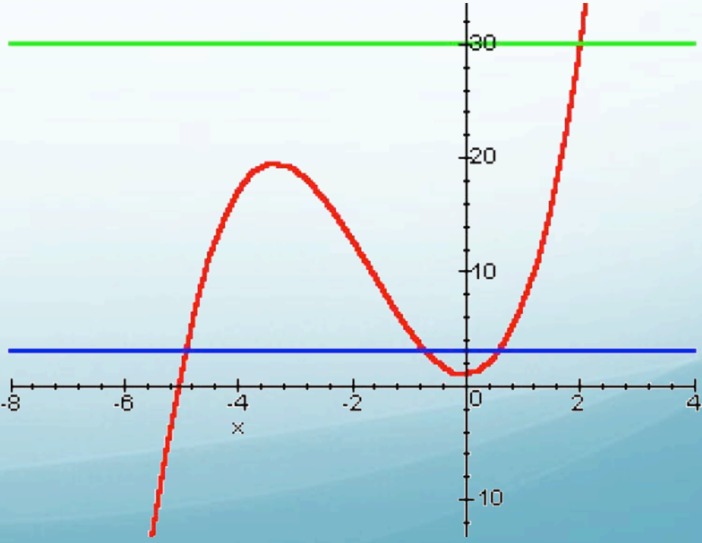
$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

DEFINIZIONE – Una funzione da X a Y si dice **SURIETTIVA** quando ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X.



Dicendo almeno intendiamo che un elemento di Y può essere l'immagine di più elementi di X. Se una funzione è suriettiva, l'insieme Y coincide con il codominio.

Esempio



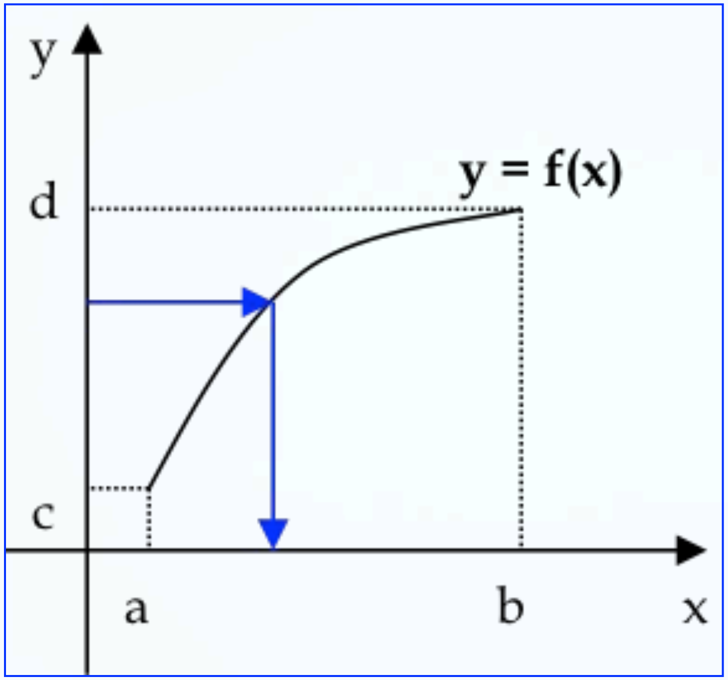
DEFINIZIONE – Una funzione da X a Y si dice **BIIETTIVA** (o biunivoca) quando è sia iniettiva che suriettiva.

In una funzione biunivoca c'è una corrispondenza "uno a uno" fra gli elementi di X e quelli di Y. Ogni elemento di X è l'immagine di uno e un solo elemento di Y e viceversa.

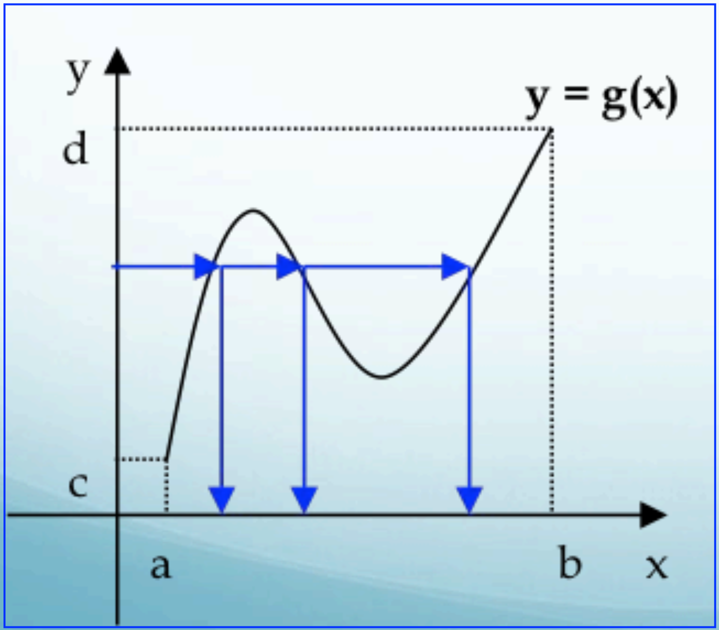
Teorema

Una funzione è invertibile se, e solo se, è biettiva.

Esempio

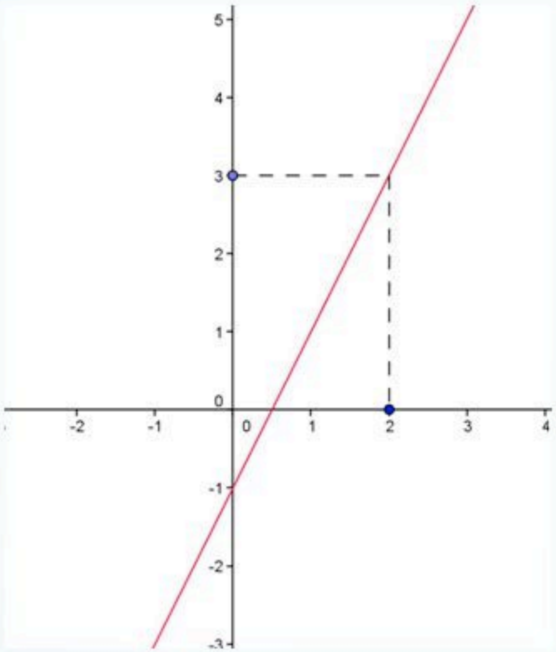


La funzione y=f(x) è biiettiva

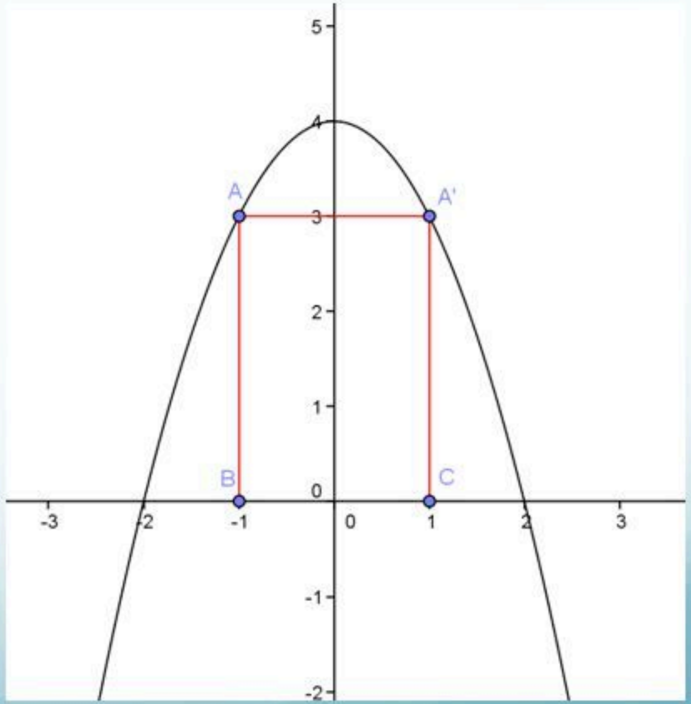


La funzione y=g(x) non è biiettiva perché non è iniettiva

Esempio



$y = -x^2+4$ *è suriettiva se si considera* come insieme B quello degli y tali che *y < 4,*
ma non è iniettiva perché scelto nel codominio un y diverso da 4, esso è immagine di *due valori distinti di* x.



y = 2x-1 è sia iniettiva che suriettiva: a ogni valore scelto sull'asse y corrisponde *un valore* (suriettiva) e *un solo (iniettiva) valore sull'asse* x. *La* funzione è quindi biiettiva.

Esercizio

Stabilire se la seguente funzione è iniettiva, suriettiva, biiettiva:

$$y = \frac{3x+2}{x}$$

Dominio della funzione:

$$D = \Re - \{0\} \xrightarrow{oppure} D = \left]-\infty;0\right[\vee \left]0;+\infty\right[$$

Se la funzione è iniettiva, significa che:

$$\forall (x_1, x_2) \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Quindi, dati x_1 e x_2, si ha:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad se \quad \frac{3x_1+2}{x_1} = \frac{3x_2+2}{x_2} \xrightarrow{calcoli} x_1 = x_2$$

La funzione è iniettiva.

Verifichiamo se la funzione è suriettiva.

Ricaviamo la funzione inversa:

$$y=\frac{3x+2}{x} \rightarrow xy=3x+2 \rightarrow xy-3x=2 \rightarrow x(y-3)=2 \rightarrow x=\frac{2}{y-3}$$

Codominio della funzione:

$$C=\Re-\{3\} \xrightarrow{oppure} C=\left]-\infty;3\right[\vee \left]3;+\infty\right[$$

La funzione non è suriettiva.

Possiamo però affermare che è una corrispondenza biunivoca tra D e C:

$$D \rightarrow C \xrightarrow{oppure} R-\{0\} \rightarrow R-\{3\}$$

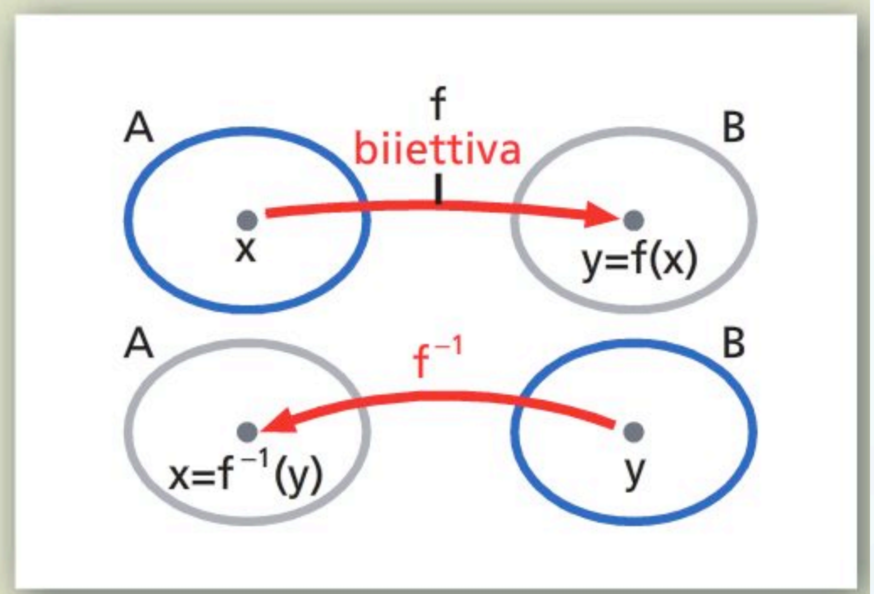
Funzione inversa

DEFINIZIONE

Funzione inversa

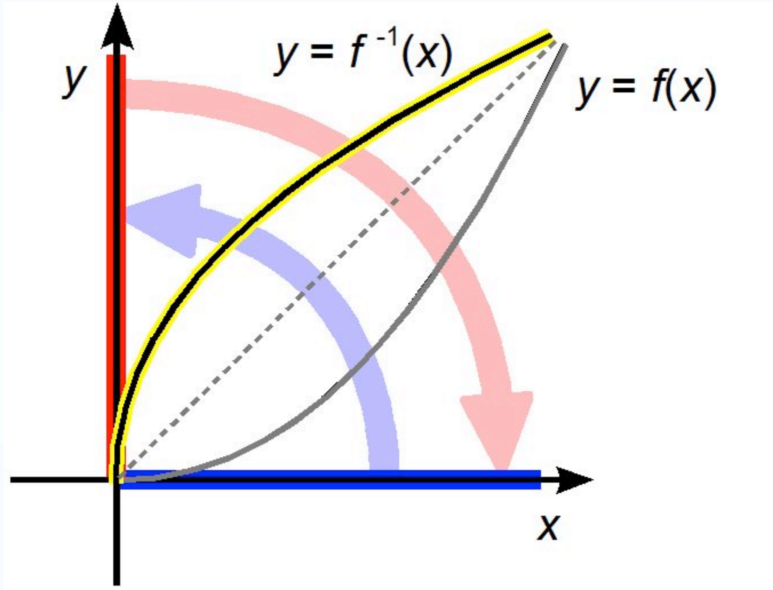
Data la funzione biiettiva f da A a B, la funzione inversa di f è la funzione biiettiva f^{-1} da B ad A che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$:

$$f^{-1}\colon y \to x.$$



Se una funzione ammette inversa, si dice che è **invertibile**.

Data una funzione biiettiva reale di variabile reale $y=f(x)$, disegnare il grafico di f^{-1} equivale a partire dalle ordinate di f e ricavare le ascisse.



Ordinate e ascisse si scambiano i ruoli:

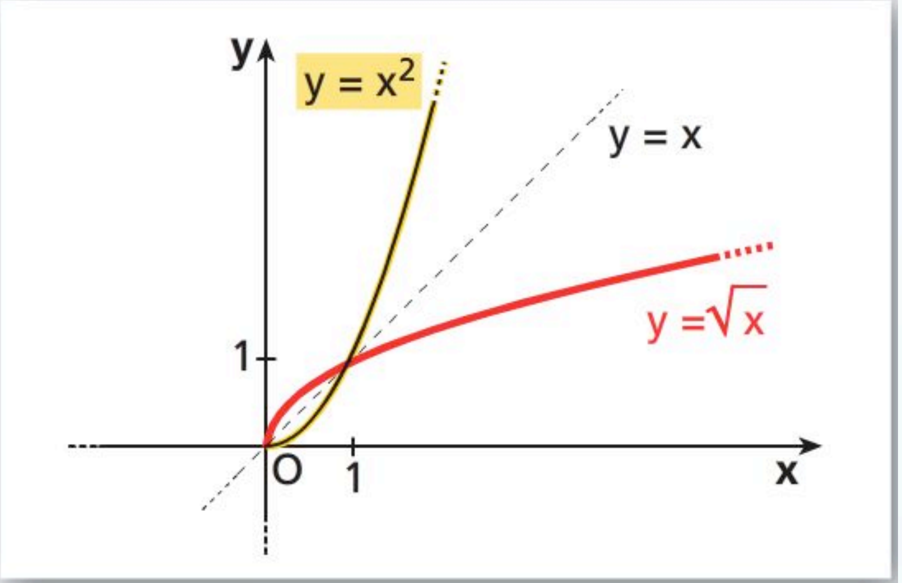
$$\boxed{x \to y \text{ e } y \to x}$$

Il grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Sfruttando questa proprietà, conoscendo il grafico di una funzione possiamo disegnare il grafico della sua inversa.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^2$ ha come dominio $\mathbb{R}$, ma in $\mathbb{R}$ non è biiettiva. Per renderla biiettiva dobbiamo considerare come dominio un insieme più ristretto, per esempio quello dei numeri reali positivi o nulli. In casi come questo parliamo di **restrizione del dominio** per l'invertibilità della funzione. La sua funzione inversa è:



$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Per rappresentare la funzione f^{-1} insieme alla funzione f, scambiamo le variabili nell'espressione della funzione inversa, considerando: $y = \sqrt{x}$.

Esempio

Sia data la funzione: $y = f(x) = 2x - 1$

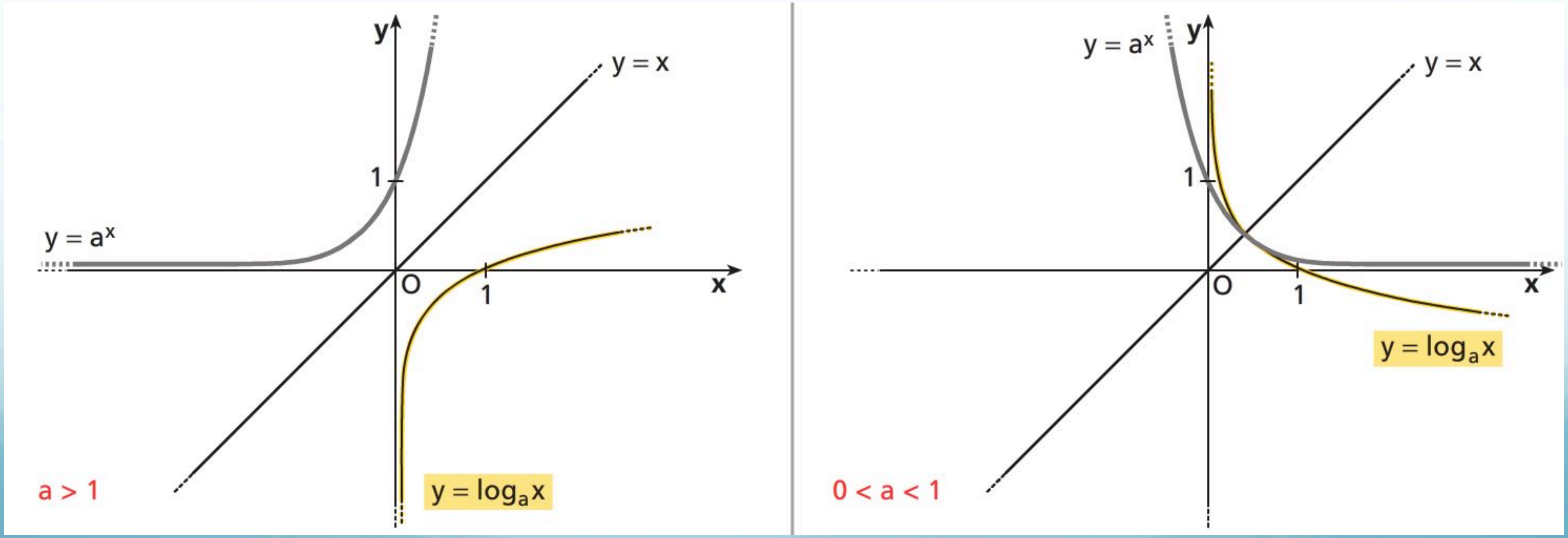
Poiché la funzione è biiettiva, ammette inversa. Possiamo ottenere la funzione inversa nel seguente modo:

- ricaviamo dalla funzione la x: $x = \dfrac{y+1}{2}$
- scambiamo la x con la y: $f^{-1}(x) = y = \dfrac{x+1}{2}$

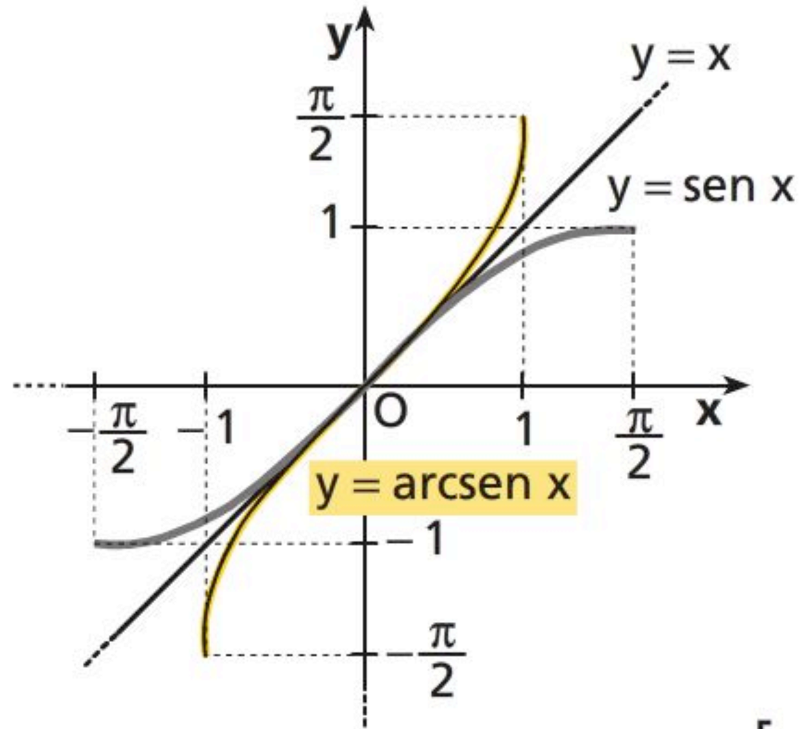
Esempio

La funzione: $y = f(x) = x^2 - 1$ non ammette inversa perché non è biiettiva, in particolare non è iniettiva.

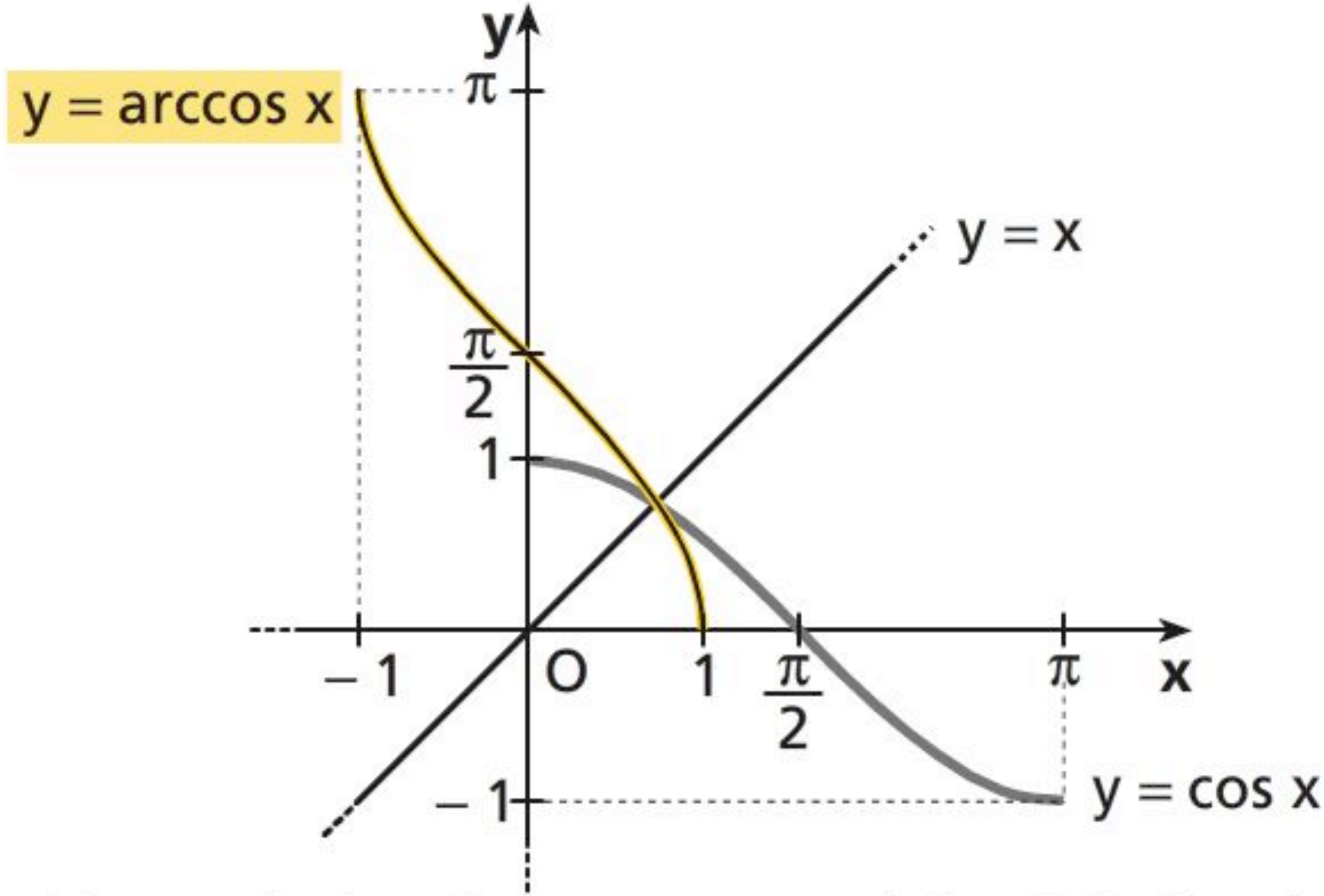
Funzione esponenziale e logaritmica – La funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Sono entrambe funzioni strettamente monotòne e quindi biiettive.



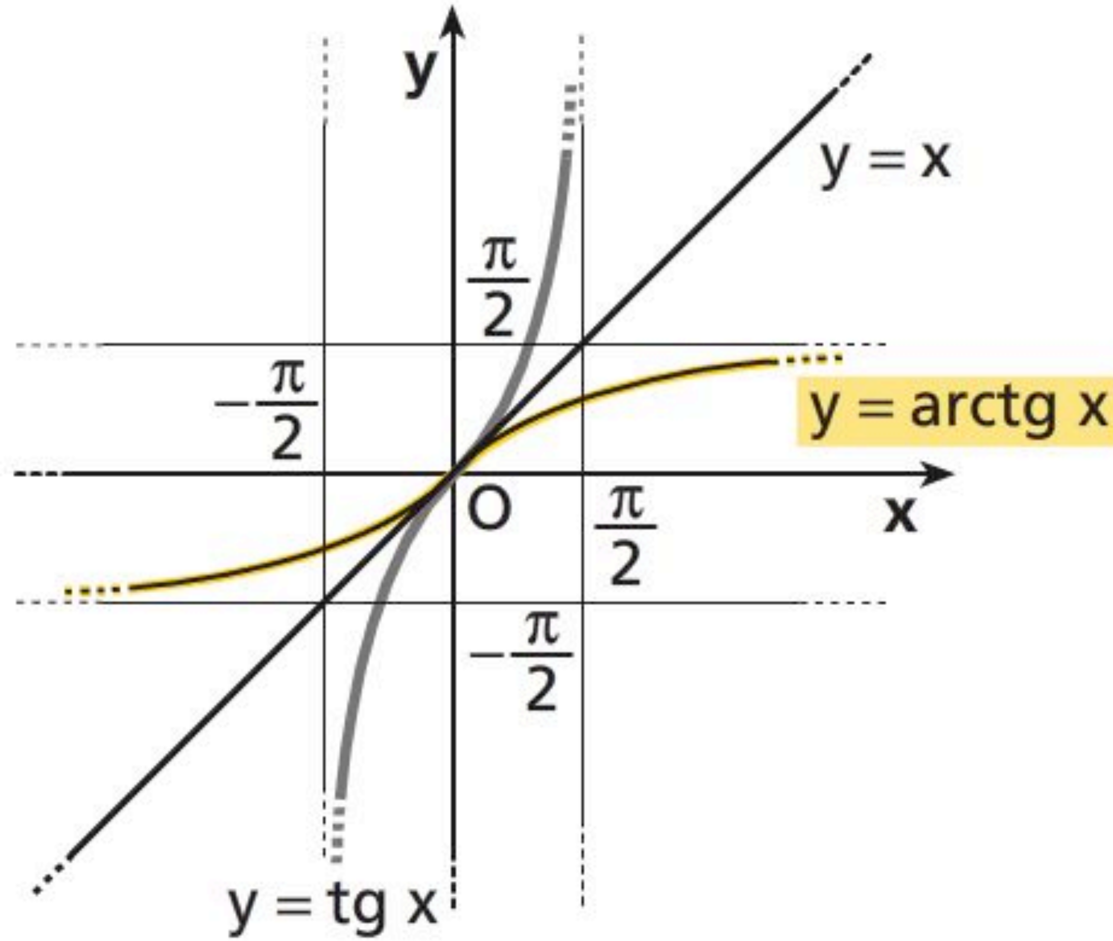
Funzioni goniometriche e le loro inverse – Poiché le funzioni goniometriche sono periodiche, e quindi non biiettive, è necessario effettuare una restrizione del dominio, in modo che risultino essere biiettive.



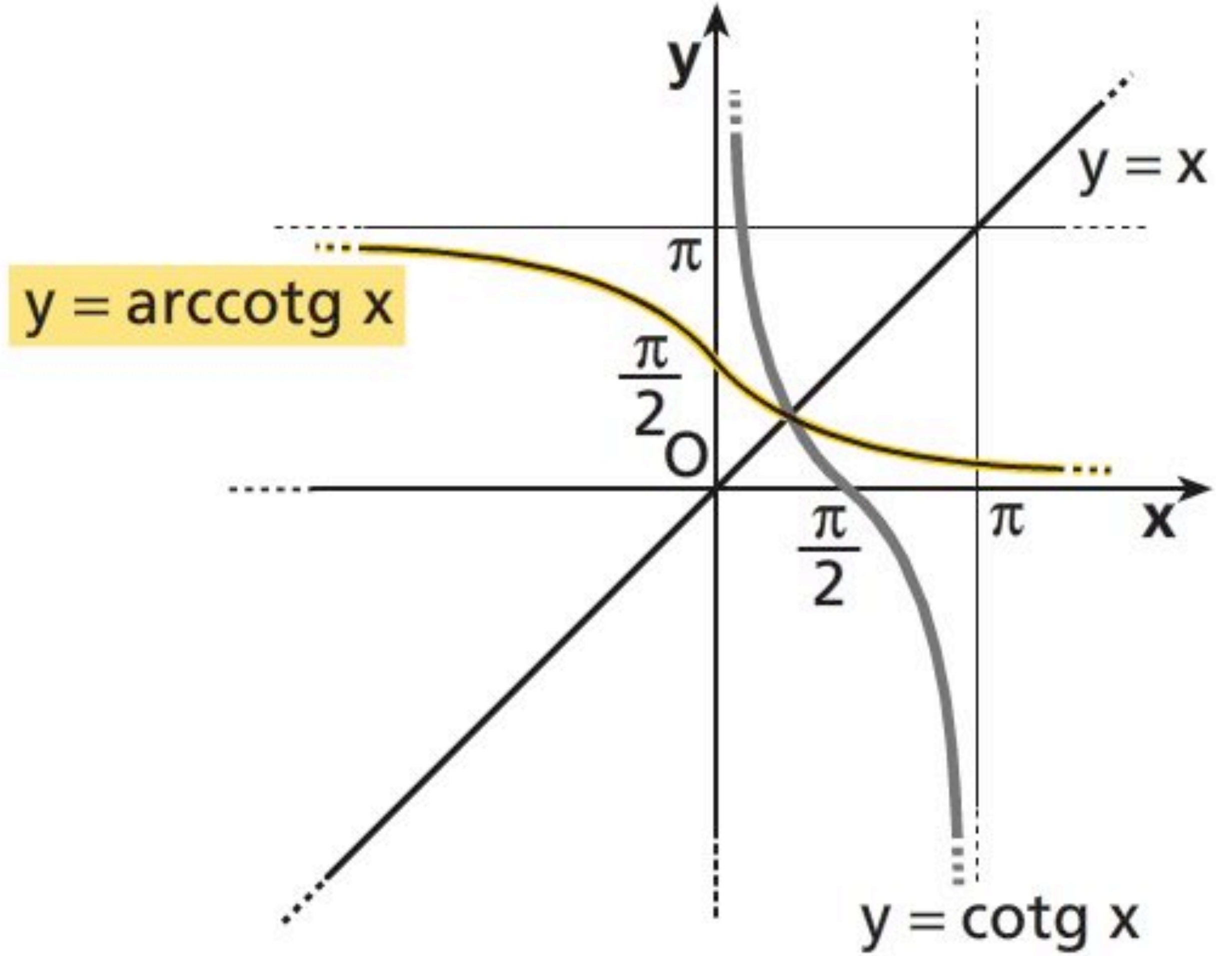
a. Considerata la funzione seno nel dominio $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la **funzione arcoseno** ha dominio $D = [-1; 1]$ e codominio $C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



b. Considerata la funzione coseno nel dominio $[0; \pi]$, la **funzione arcocoseno** ha dominio $D = [-1; 1]$ e codominio $C = [0; \pi]$.



c. Considerata la funzione tangente nel dominio $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, la **funzione arcotangente** ha dominio $D = \mathbb{R}$ e codominio $C = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.



d. Considerata la funzione cotangente nel dominio $]0; \pi[$, la **funzione arcocotangente** ha dominio $D = \mathbb{R}$ e codominio $C =]0; \pi[$.

Composizione di due funzioni

Esempio

Consideriamo le seguenti funzioni:

$$f(x) = 2x - 1 \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Calcoliamo l'immagine di 3:

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Al valore ottenuto applichiamo la funzione g:

$$g(5) = -(5)^2 + 3 = -22$$

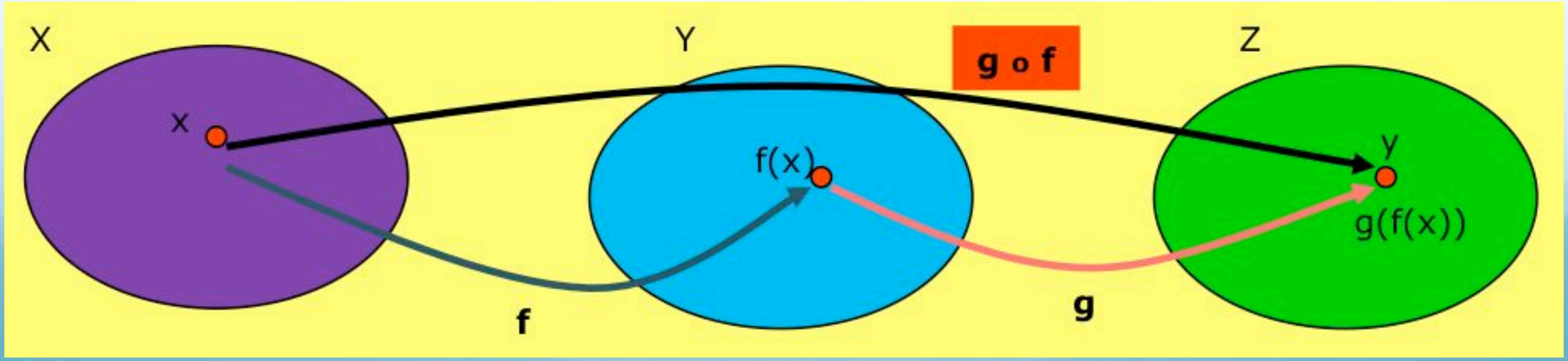
Al valore iniziale 3 abbiamo così associato uno ed un solo valore, -22, ottenendo una nuova funzione che chiamiamo *funzione composta di f e g e che indichiamo con gof oppure con g[f(x)]*.

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3, ossia sostituiamo f(x)=2x –1 al posto della x nella funzione g(x):

$$\boxed{\begin{aligned}&g\left[f(x)\right]=g(2x-1)=-(2x-1)^2+3=\\&-4x^2-1+4x+3=-4x^2+4x+2\end{aligned}}$$

In generale, date due funzioni: $f : X \rightarrow Y \quad g : Y \rightarrow Z$ comporre le due funzioni significa considerare una terza funzione, detta **funzione composta mediante f e g**, che associa a ogni elemento di X un elemento di Z nel seguente modo:

- all'elemento x appartenente ad X corrisponde, mediante f, l'elemento y = f(x) appartenente a Y
- all'elemento f(x) appartenente a Y corrisponde, mediante g, l'elemento g[f(x)] appartenente a Z



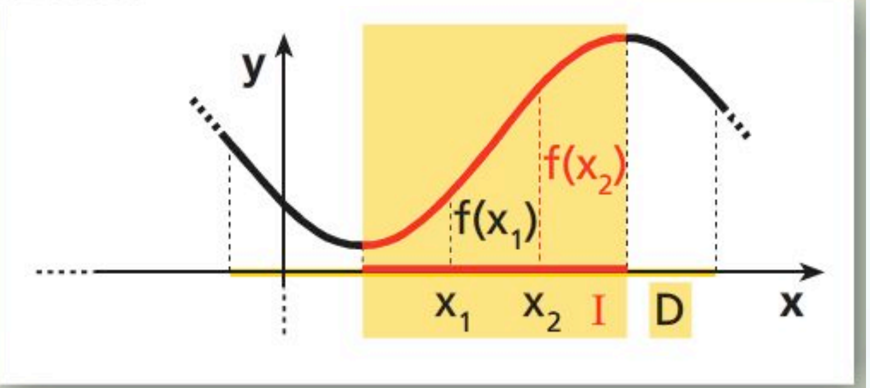
Funzioni crescenti e decrescenti

DEFINIZIONE

Funzione crescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice crescente in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

● Una funzione crescente viene detta anche **crescente in senso stretto**.

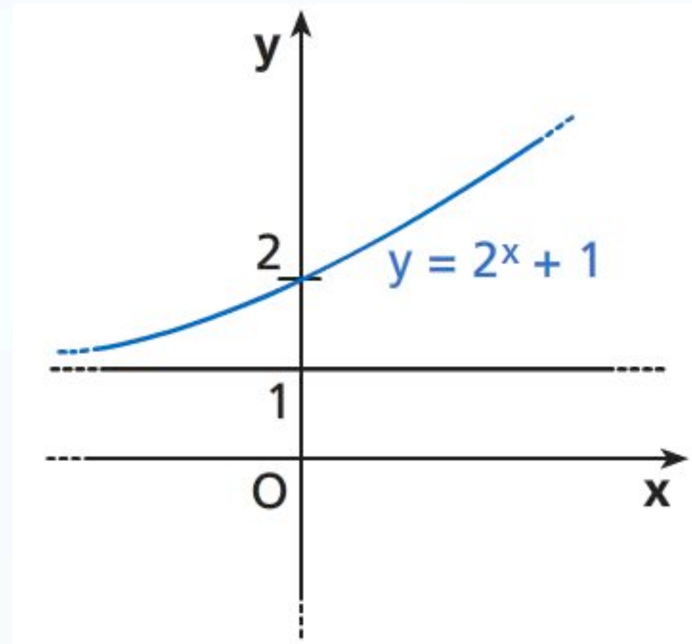


Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) < f(x_2)$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **crescente in senso lato**, o anche **non decrescente**.

ESEMPIO La funzione $y = 2^x + 1$ è crescente in $\mathbb{R}$.

$$x_1 < x_2 \;\rightarrow\; 2^{x_1} < 2^{x_2}$$

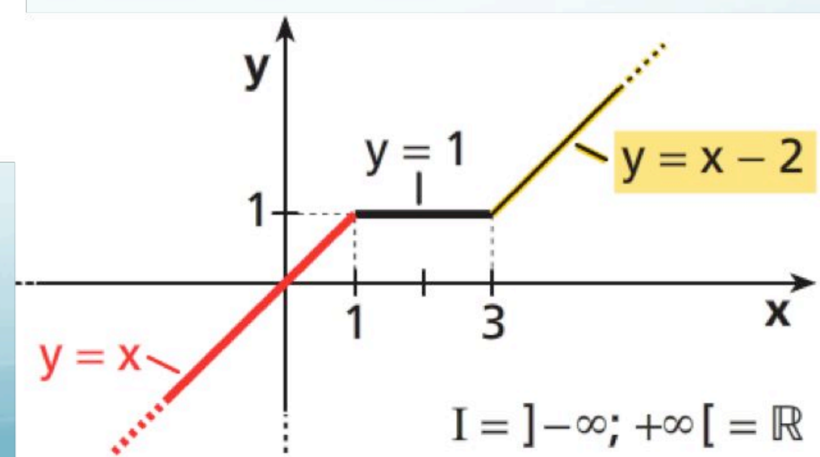
$$2^{x_1} + 1 < 2^{x_2} + 1 \;\rightarrow\; y_1 < y_2$$



ESEMPIO La funzione

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

è crescente in senso lato in $\mathbb{R}$ (figura 4).

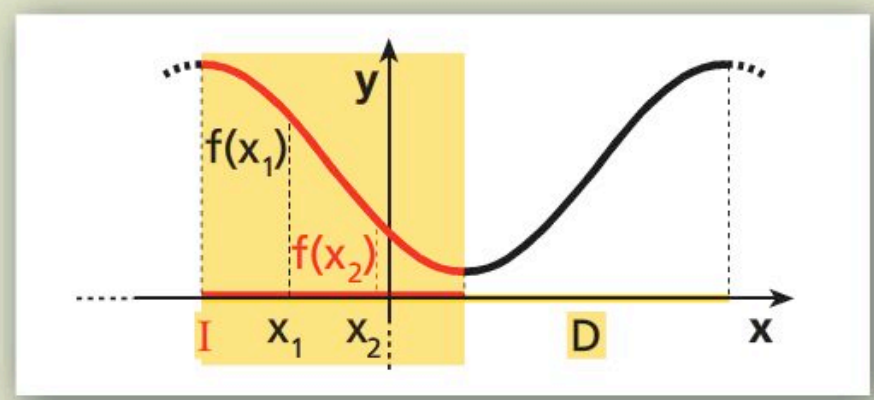


Una funzione crescente viene detta anche **crescente in senso stretto.**

DEFINIZIONE

Funzione decrescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice decrescente in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

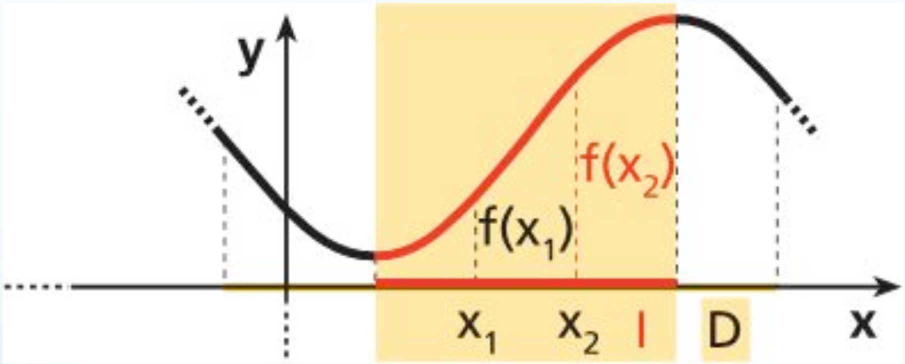


Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) > f(x_2)$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **decrescente in senso lato**, o anche **non crescente**.

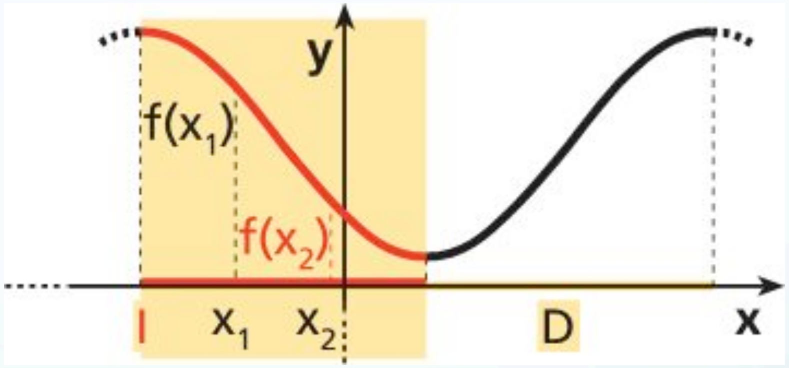
DEFINIZIONE

Funzione monotona

Una funzione di domino D si dice monotòna in un intervallo *I*, sottoinsieme di *D*, se, in quell'intervallo è sempre crescente o decrescente.



funzione monotòna crescente in I



funzione monotòna decrescente in I

Una funzione f monotòna in senso stretto è sempre iniettiva. Infatti, se f è monotòna in senso stretto, allora per ogni $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$; quindi risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè f è iniettiva.

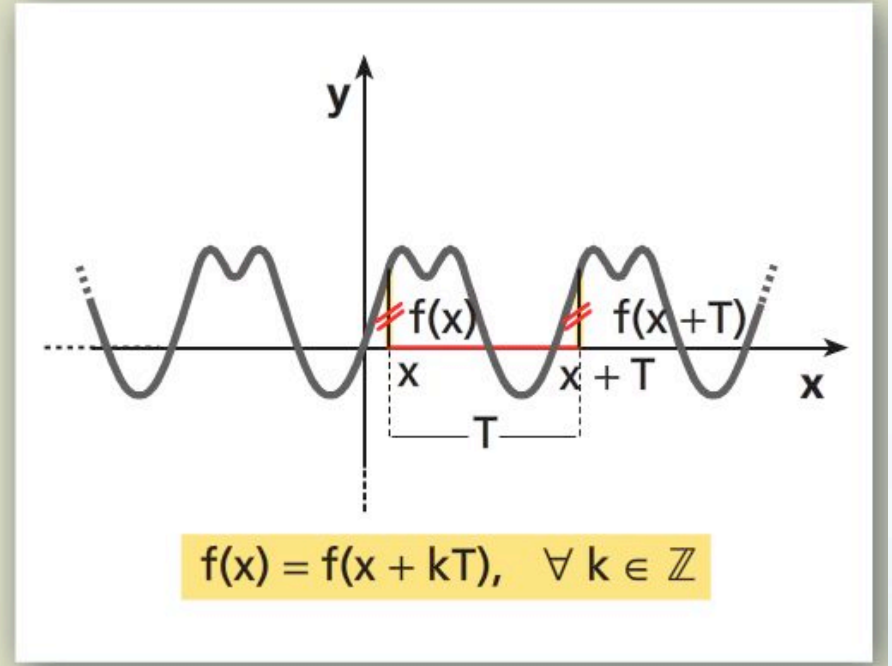
Funzioni periodiche

DEFINIZIONE

Funzione periodica

Una funzione $y = f(x)$ si dice periodica di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha:

$$f(x) = f(x + kT).$$



In una funzione periodica il grafico si ripete di periodo in periodo.

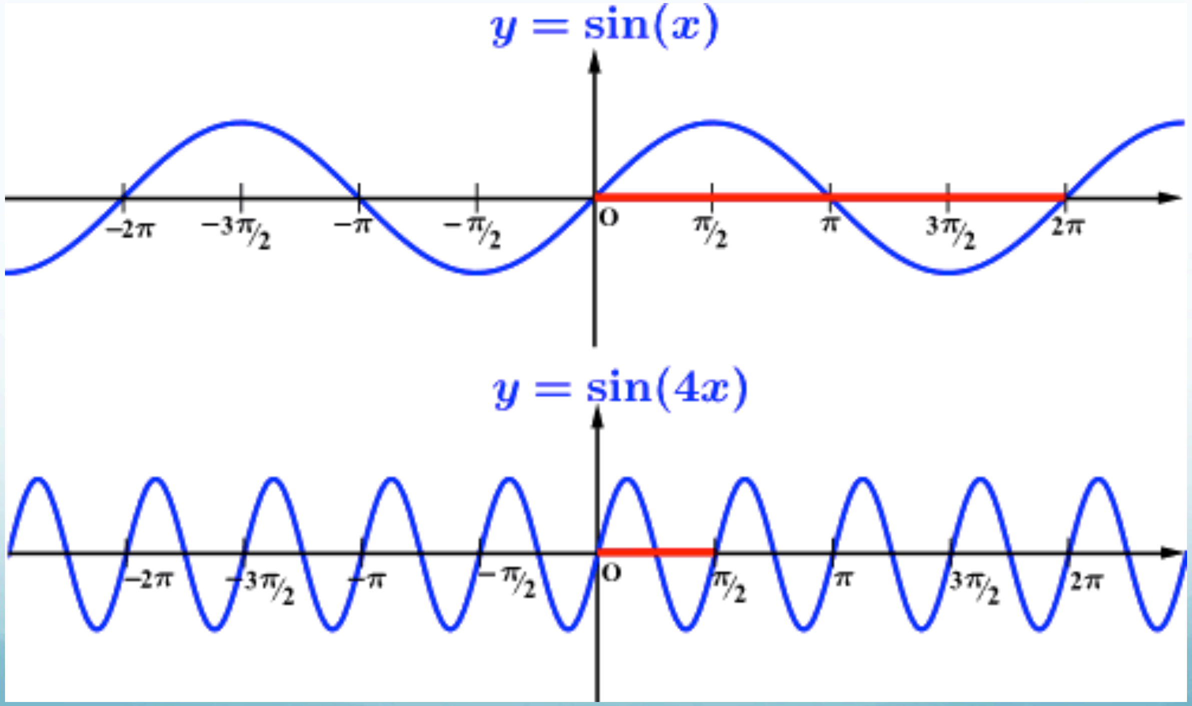
ESEMPIO

$y = \text{sen}\, x$ e $y = \cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π.

$y = \text{tg}\, x$ e $y = \text{cotg}\, x$ sono funzioni periodiche di periodo π.

y=sen(x) è periodica di periodo 2π perché:

$$\text{sen}(x)=\text{sen}(x+2k\pi)$$



Funzioni pari e dispari

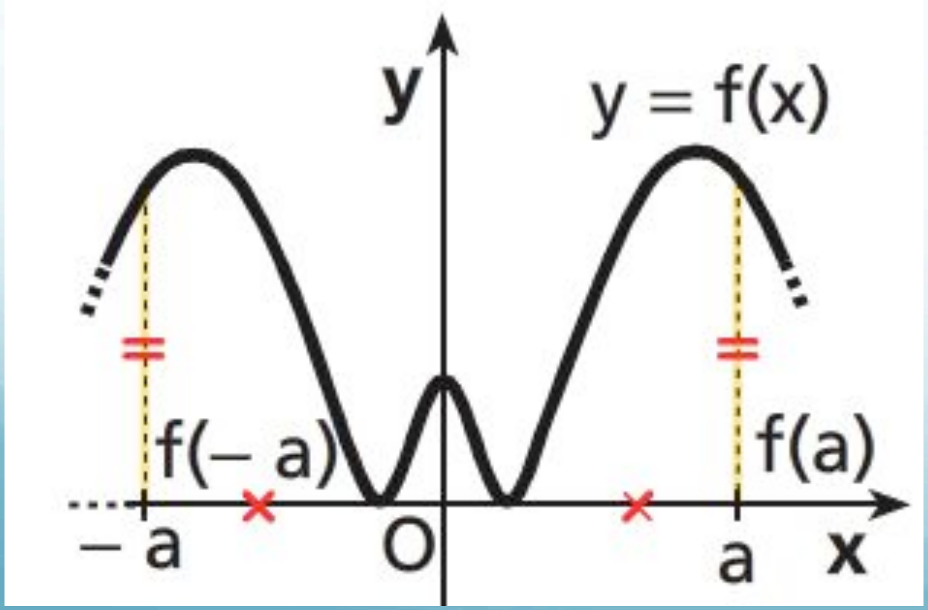
DEFINIZIONE

Funzione pari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ avente D come dominio si dice pari se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$f: D \to \mathbb{R}$ $\qquad D \subseteq \mathbb{R}$

$\forall\, x, -x \in D \quad \Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$

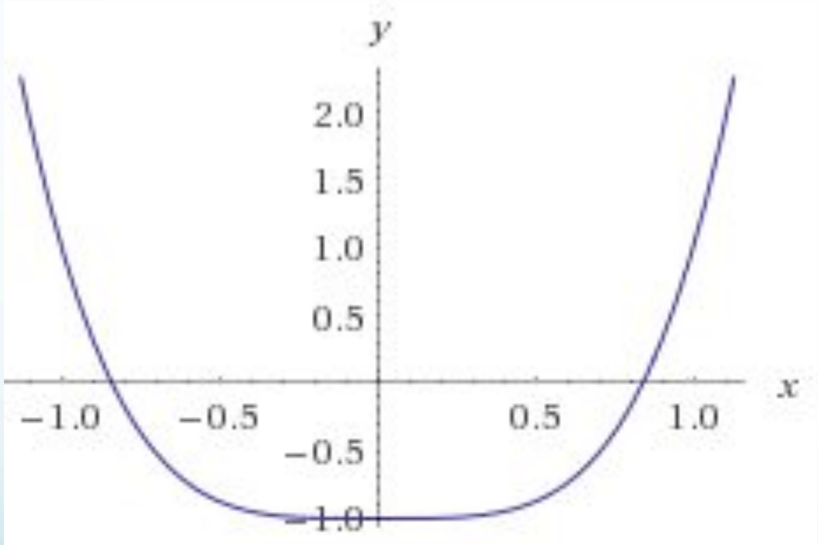


Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = 2x^4 - 1$ è pari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene ancora $f(x)$:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - 1 = 2x^4 - 1 = f(x).$$



In generale, se una funzione è polinomiale

$y=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$

e contiene soltanto potenze della x con esponente pari, allora la funzione è pari.

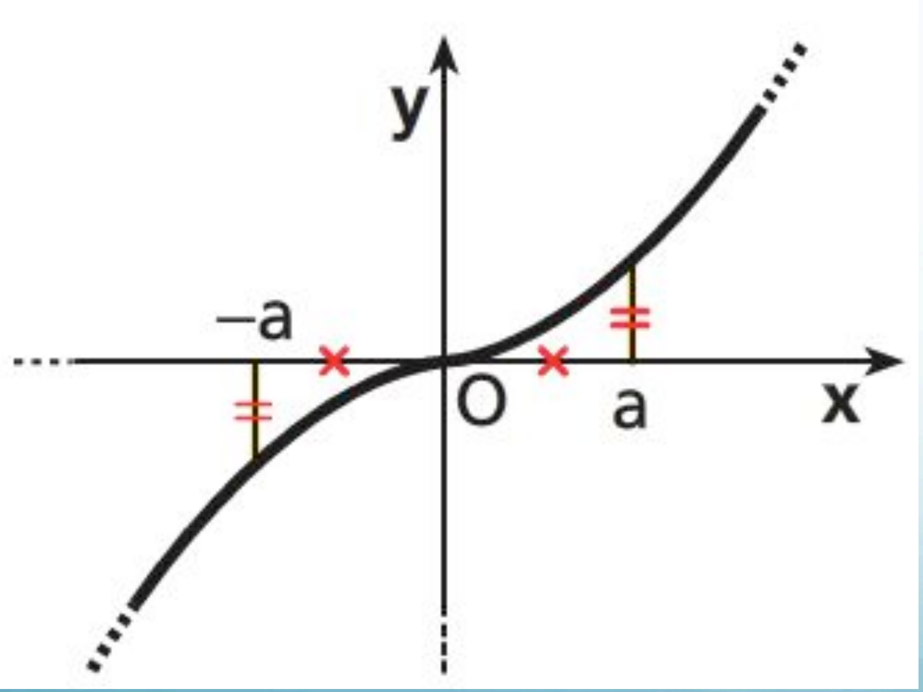
DEFINIZIONE

Funzione dispari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, anche $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ avente D come dominio si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$ per qualunque x appartenente a D.

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad$ $D \subseteq \mathbb{R}$

$\forall\, x, -x \in D \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$

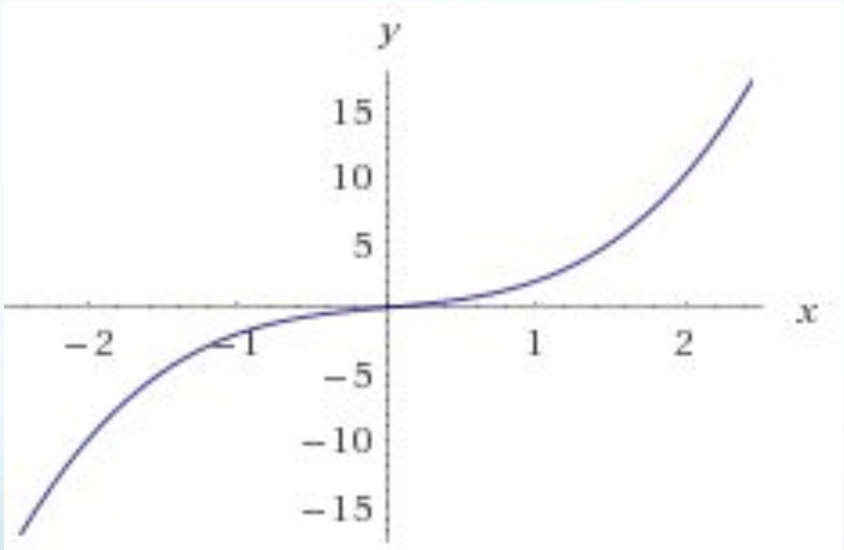


Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^3 + x$ è dispari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene $-f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

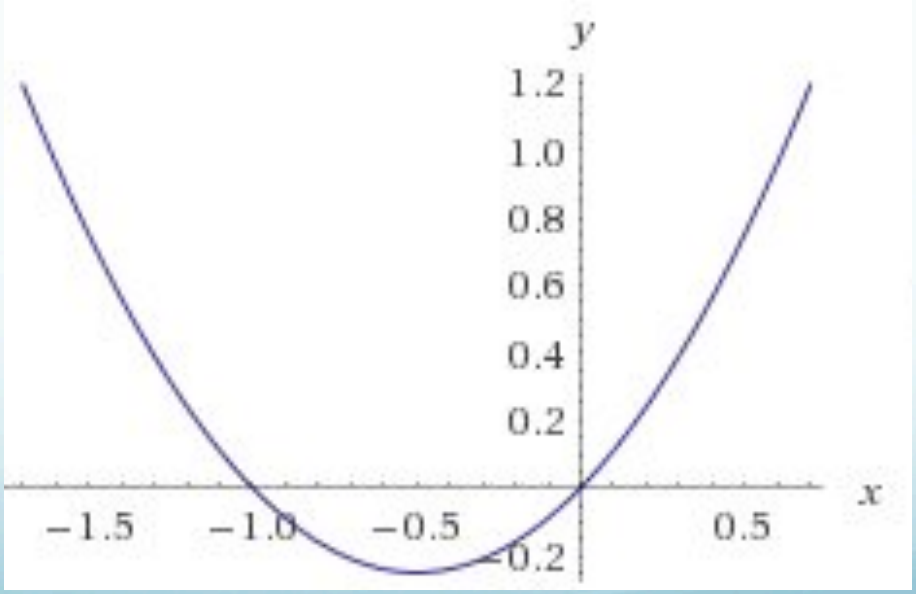


In generale, se una funzione è polinomiale $y=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$ e contiene soltanto potenze della x con esponente dispari, allora la funzione è dispari.

Una funzione che non sia pari non è necessariamente dispari (e viceversa).

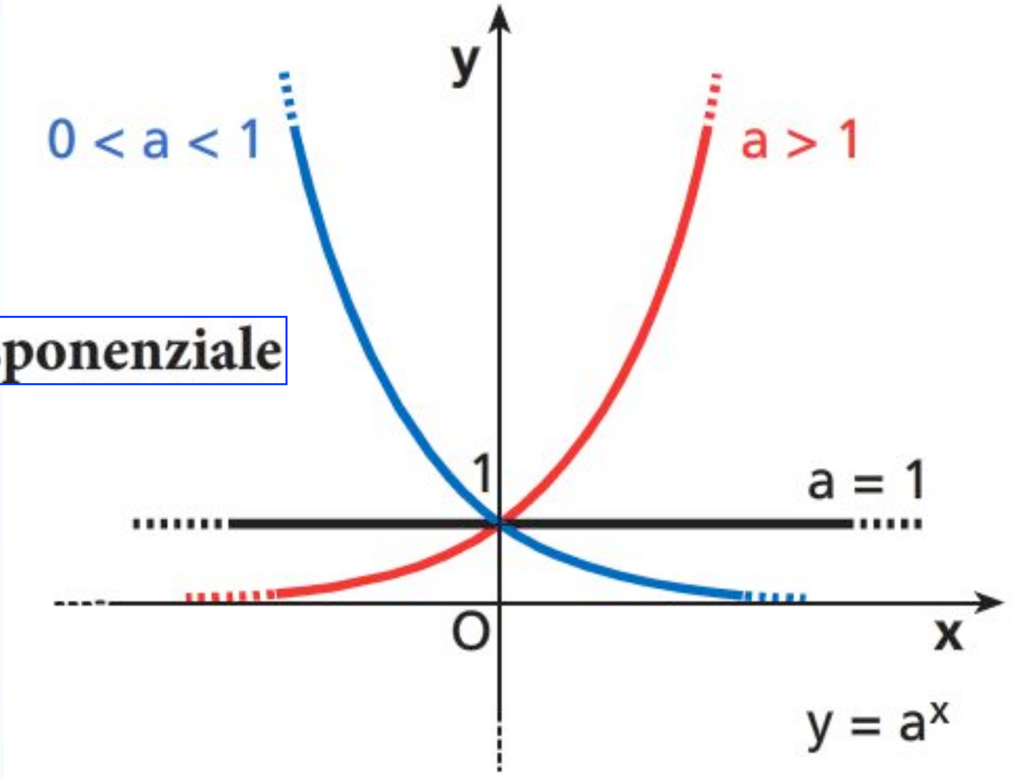
Esempio: la funzione y=x^2+x non è né pari né dispari

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq -f(x) \wedge \neq f(x).$$



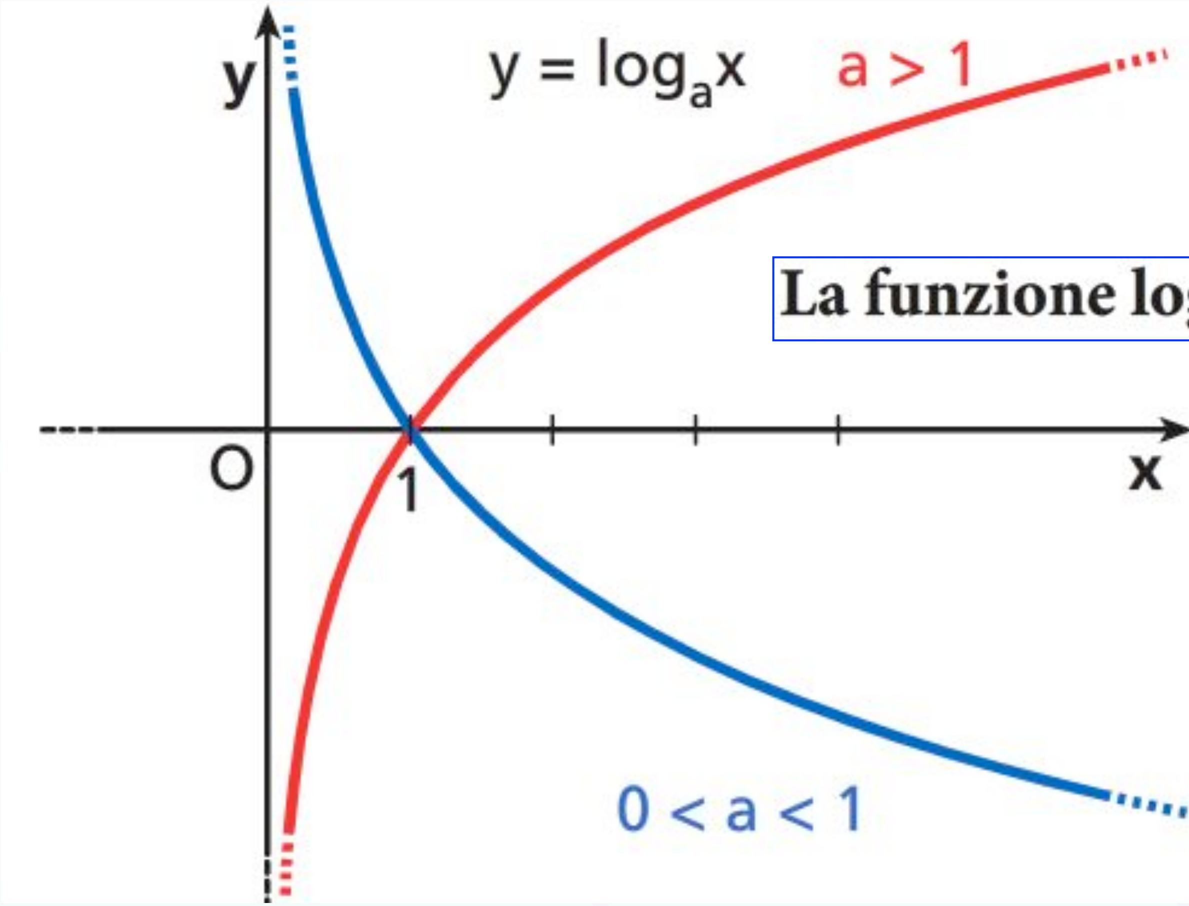
Proprietà delle principali funzioni trascendenti

La funzione esponenziale



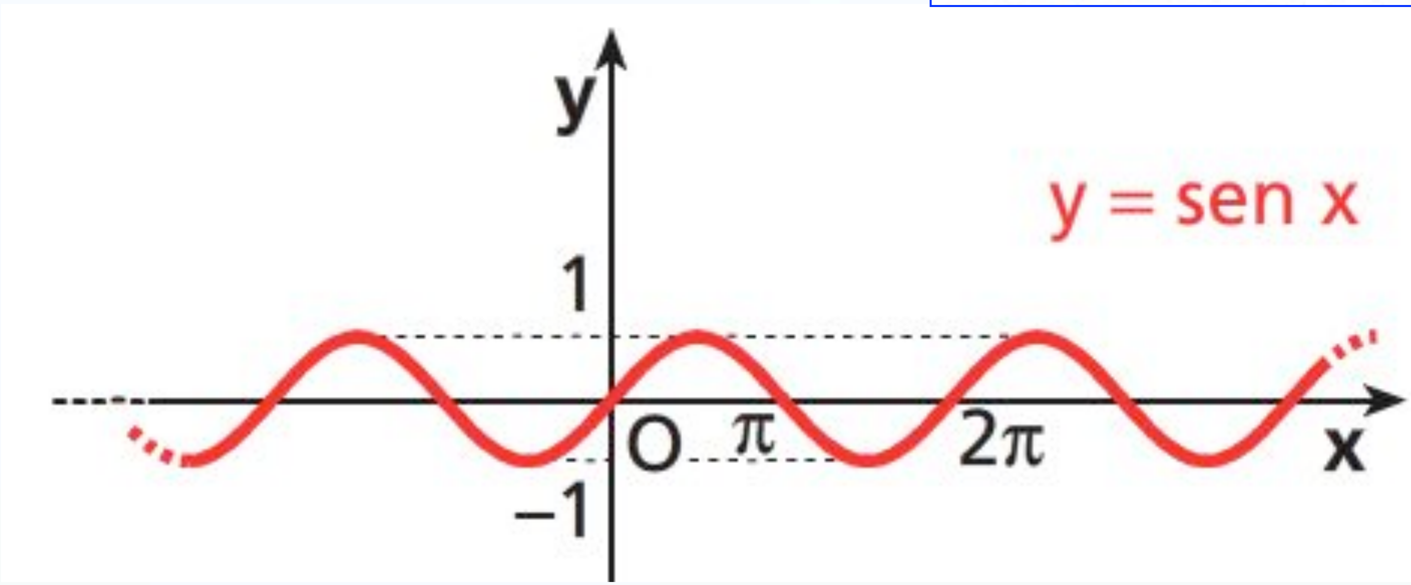
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio**, se $a \neq 1$, $\mathbb{R}^+$, ossia il suo grafico sta tutto «sopra» l'asse x.
- Il grafico: **non interseca** l'asse x; **interseca** l'asse y in $(0; 1)$.
- Se $a > 1$, è una funzione **crescente**; se $0 < a < 1$, è **decrescente**; se $a = 1$, è **costante** e vale 1.

La funzione logaritmica



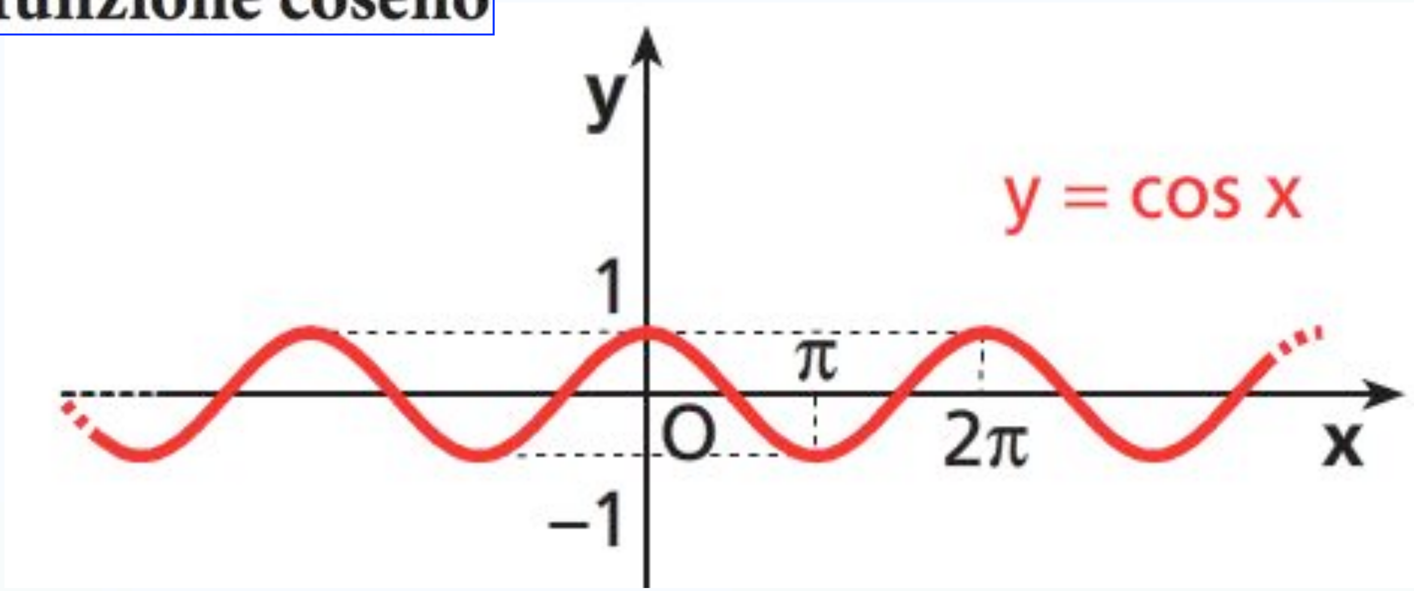
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}^+$, come **codominio** $\mathbb{R}$.
- Il grafico: **interseca** l'asse x in $(1; 0)$; **non interseca** l'asse y.
- Se $a > 1$, è una funzione **crescente**; se $0 < a < 1$, è **decrescente**.

La funzione seno



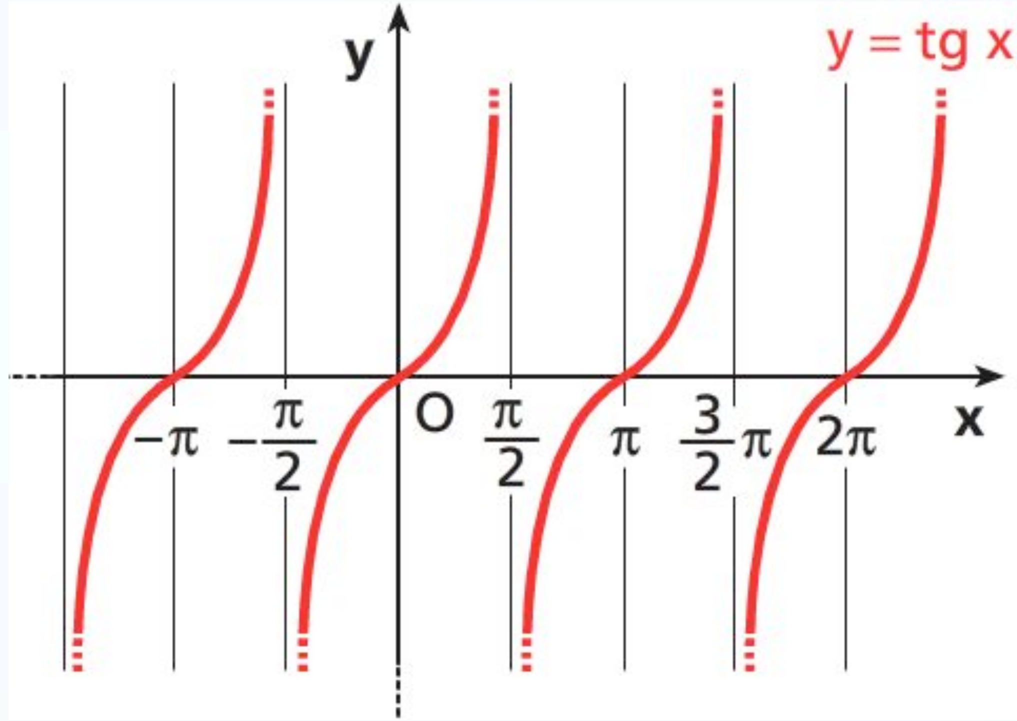
- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio** $[-1; 1]$.
- È una funzione **dispari**, in quanto $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π:
  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, è **decrescente** in $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$.

La funzione coseno

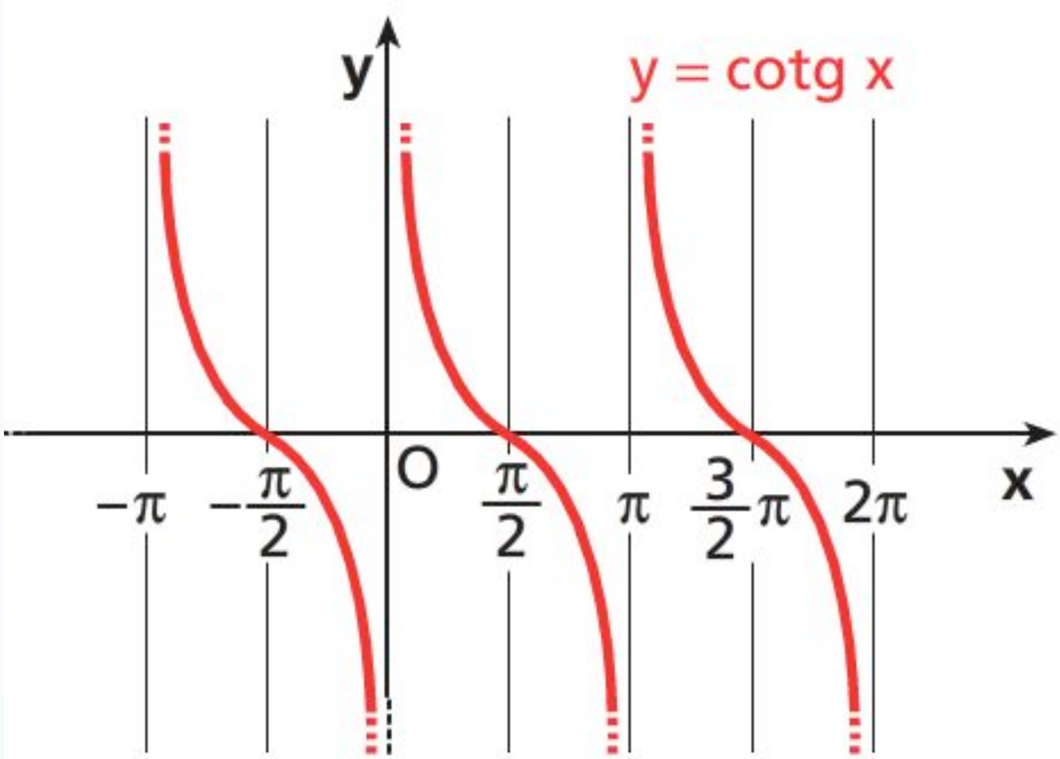


- Ha come **dominio** $\mathbb{R}$ e come **codominio** $[-1; 1]$.
- È una funzione **pari**, in quanto $\cos(-x) = \cos x$.
- È una funzione periodica di **periodo** 2π:
  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $[-\pi; 0]$, è **decrescente** in $[0; \pi]$.

La funzione tangente



- Ha come **dominio** l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e come **codominio** $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari** in quanto $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **crescente** in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.



La funzione cotangente

- Ha come **dominio** l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori $k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e come **codominio** $\mathbb{R}$.
- È una funzione **dispari** in quanto $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.
- È una funzione periodica di **periodo** π:
  $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- È **decrescente** in $]0; \pi[$.

Esercizi

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

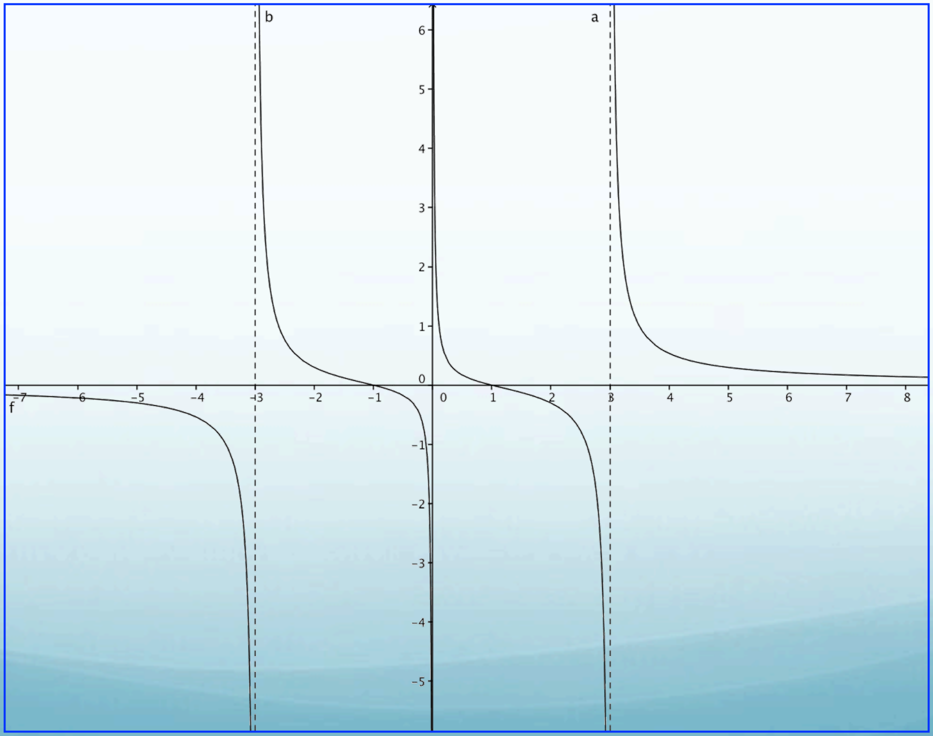
a) $y = \dfrac{x^2-1}{x^3-9x}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}}$; c) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$; d) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{sen} x - 1}$; e) $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x^2}{4}$.

a) L'espressione ha significato per ogni valore di x che rende non nullo il denominatore, ossia:

$$x^3 - 9x \neq 0 \quad \to \quad x(x^2-9) \neq 0.$$

Dominio: $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 3 \ \wedge \ x \neq -3$.

$$y = \frac{x^2-1}{x^3-9x}$$



b) L'indice della radice $\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}}$ è pari, quindi l'espressione esiste soltanto se:

$$\frac{x+2}{x^2-6x+5} \geq 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

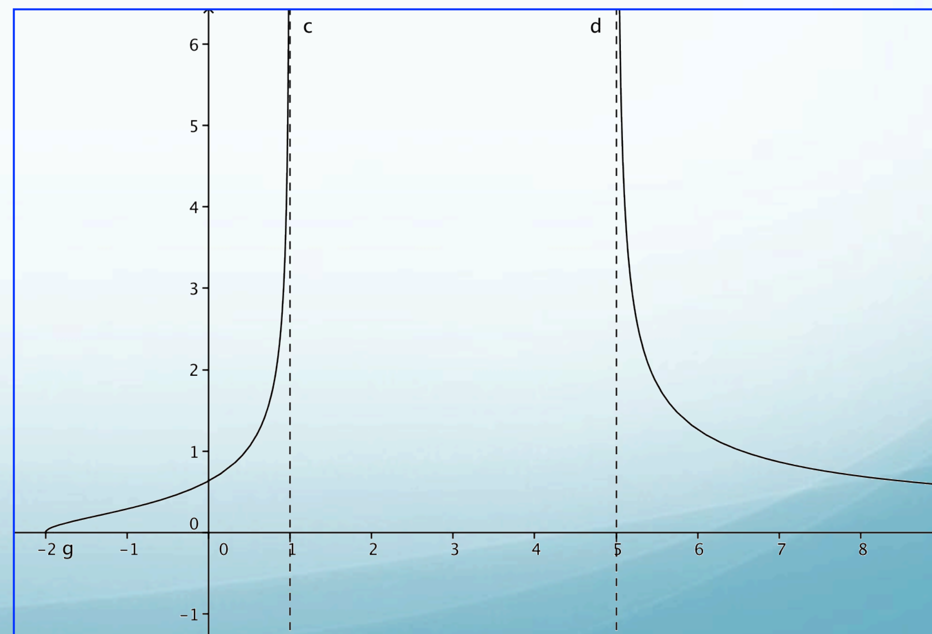
$x+2>0 \quad$ per $\quad x>-2;$

$x^2-6x+5>0 \quad$ per $\quad x<1 \vee x>5.$

$$y=\sqrt{\frac{x+2}{x^2-6x+5}}$$

		-2		1		5	
Segno di N	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Segno di D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Segno di $\frac{N}{D}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Dominio: $-2 \leq x < 1 \vee x > 5.$



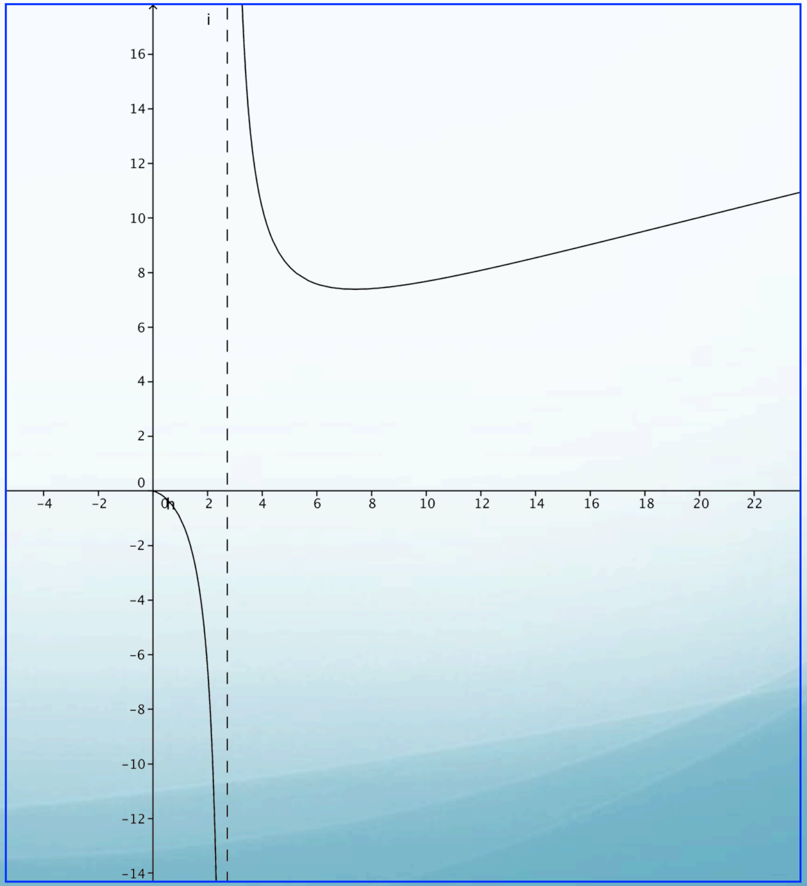
c) Per l'esistenza di $\ln x$ deve essere $x > 0$.
Per l'esistenza della frazione deve essere:

$$\ln x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \ln x \neq \ln e \quad \rightarrow \quad x \neq e.$$

Quindi:

$$\text{Dominio: } x > 0 \ \wedge \ x \neq e.$$

$$\boxed{y = \frac{x}{\ln x - 1}}$$



d) Per l'esistenza di tg x: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; per l'esistenza della frazione:

$$2 \operatorname{sen} x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} x \neq \frac{1}{2} \quad \rightarrow$$

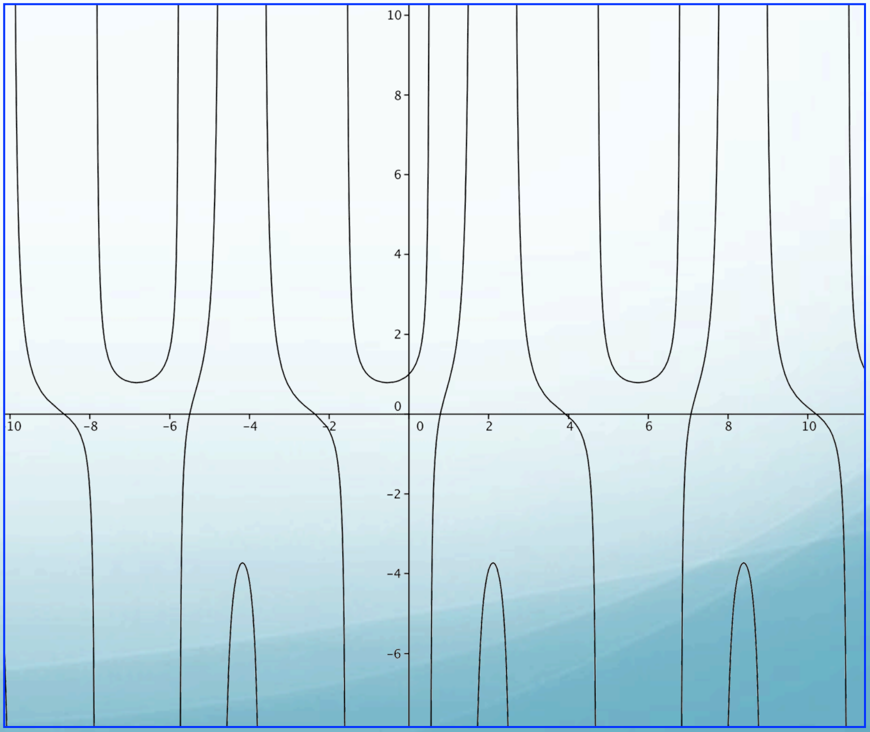
$$\rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

Quindi:

$$\text{Dominio: } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge$$

$$\wedge \ x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

$$y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{sen} x - 1}$$



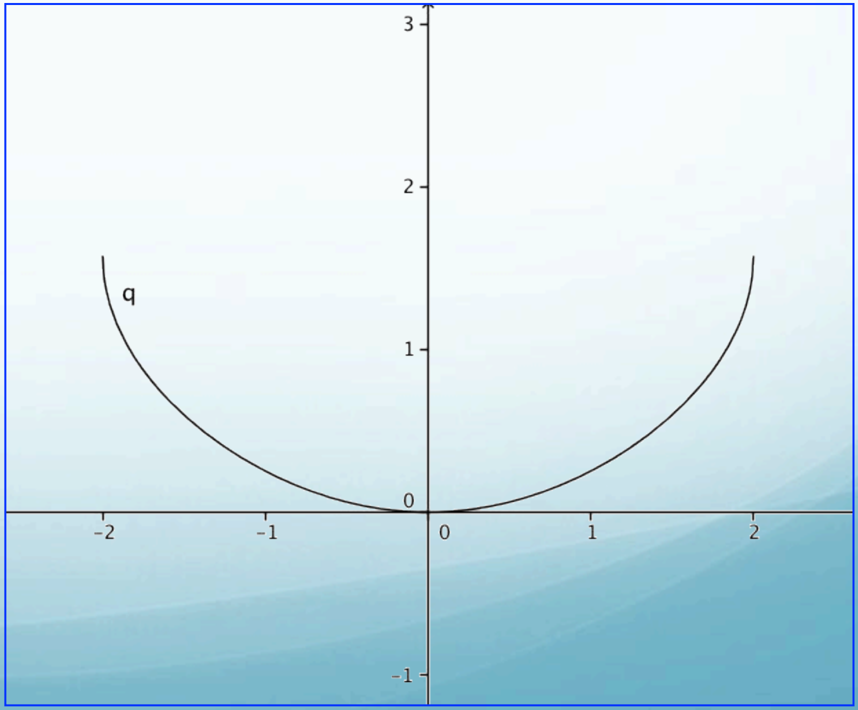
e) Per l'esistenza di arcsen t deve essere $-1 \leq t \leq 1$, quindi:

$$-1 \leq \frac{x^2}{4} \leq 1 \quad \rightarrow \quad -4 \leq x^2 \leq 4.$$

Si ha $x^2 \geq -4 \ \forall x \in \mathbb{R}$, mentre è $x^2 \leq 4$ per $-2 \leq x \leq 2$.

Dominio: $-2 \leq x \leq 2$.

$$y = \mathbf{arcsen}\,\frac{x^2}{4}$$

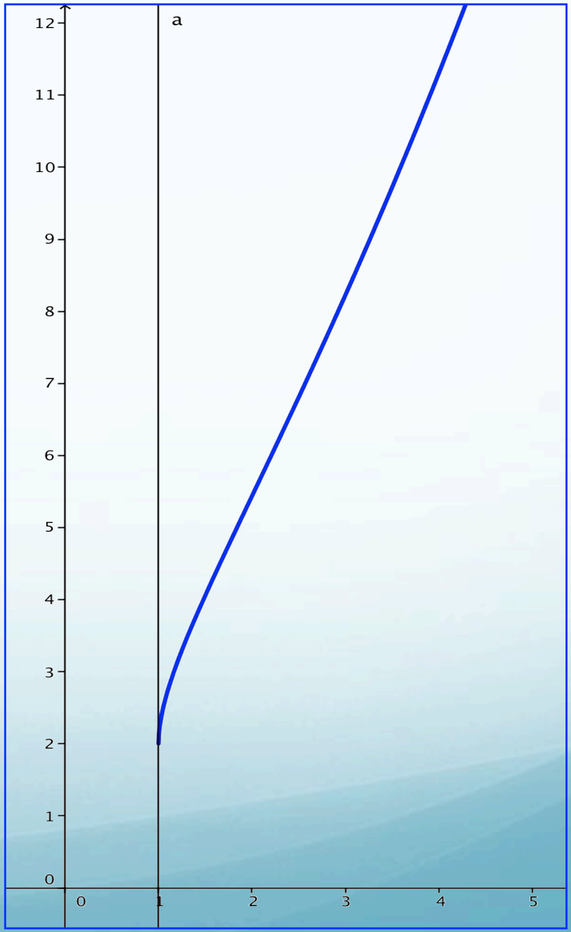


Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

$$y = 2^{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} 2 > 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \geq 1$$

dominio

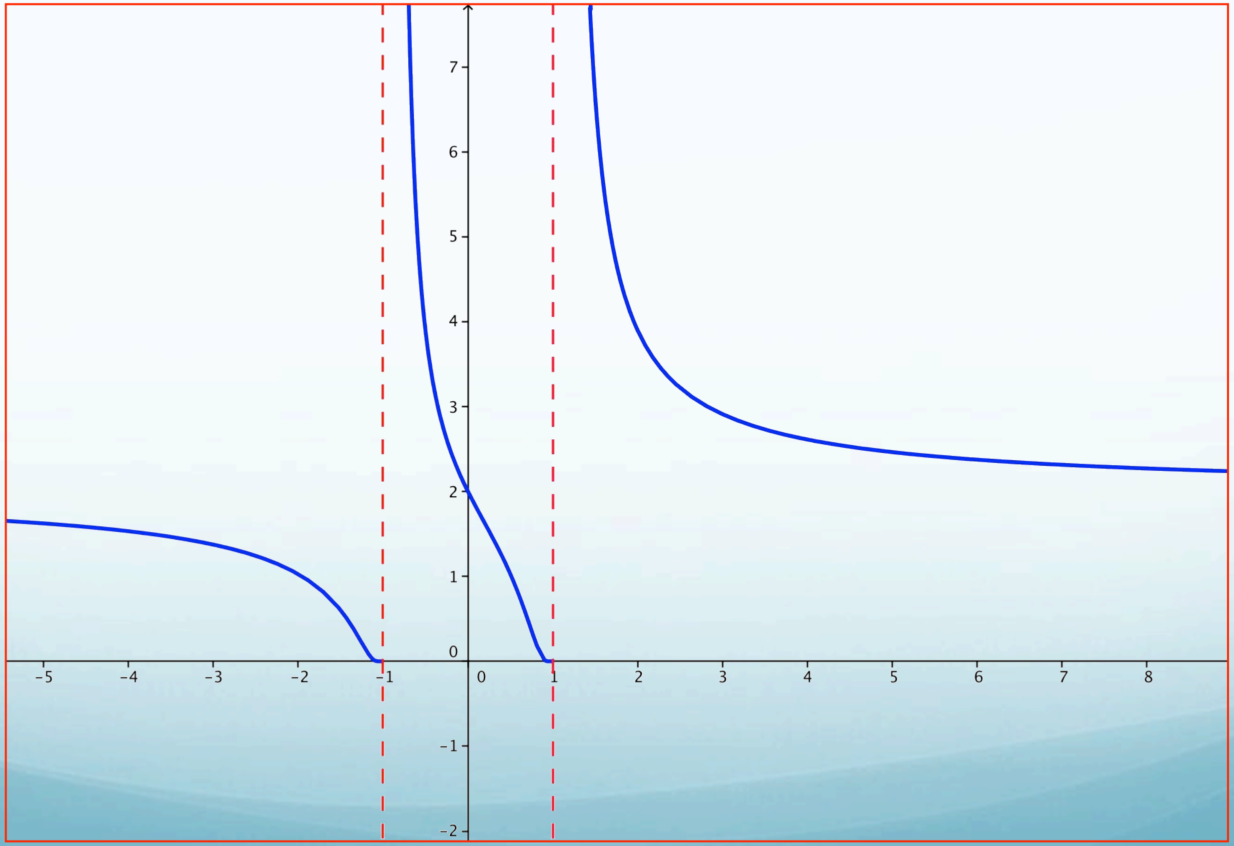
$$D = [1;+\infty[$$



$$y = 2^{\frac{x}{x^2-1}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} 2 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \neq \pm 1$$

dominio

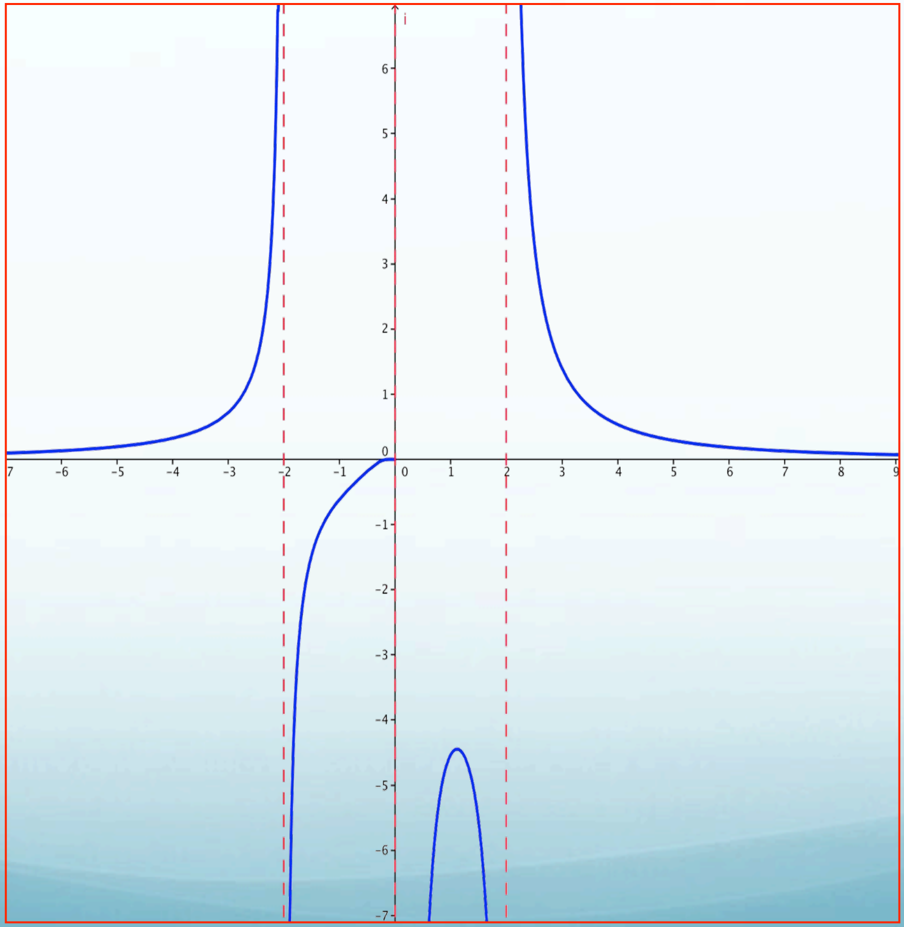
$$D = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$



$$y = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2 - 4} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \neq \pm 0 \cup x \neq \pm 2$$

dominio

$$D = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]-2;0\right[\cup \left]0;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$$

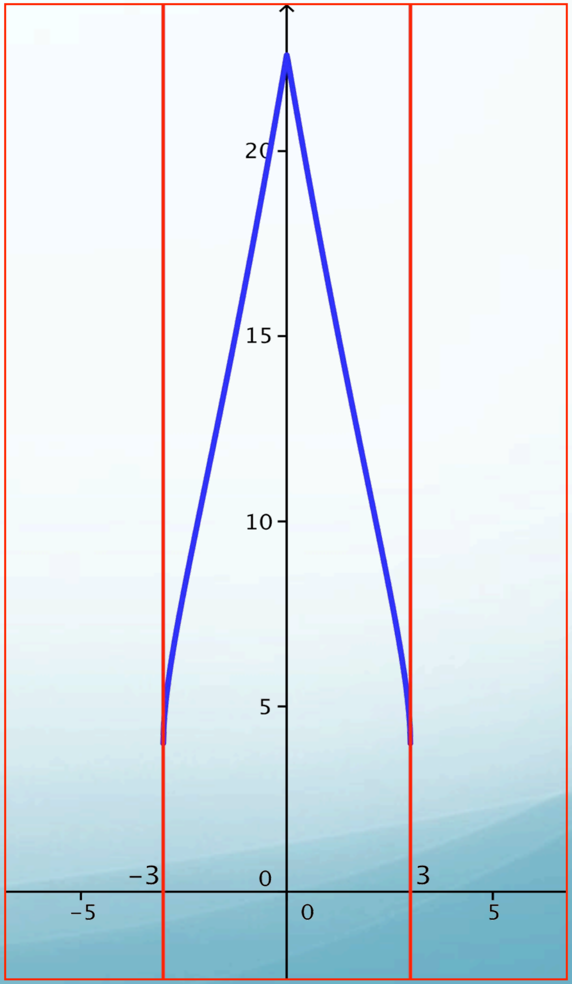


$$y = 4^{\sqrt{3-|x|}} \xrightarrow{dominio} 3-|x| \geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{valore assoluto}]{\text{definizione}} \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3+x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} -3 \leq x \leq 3$$

dominio

$$D = [-3;3]$$

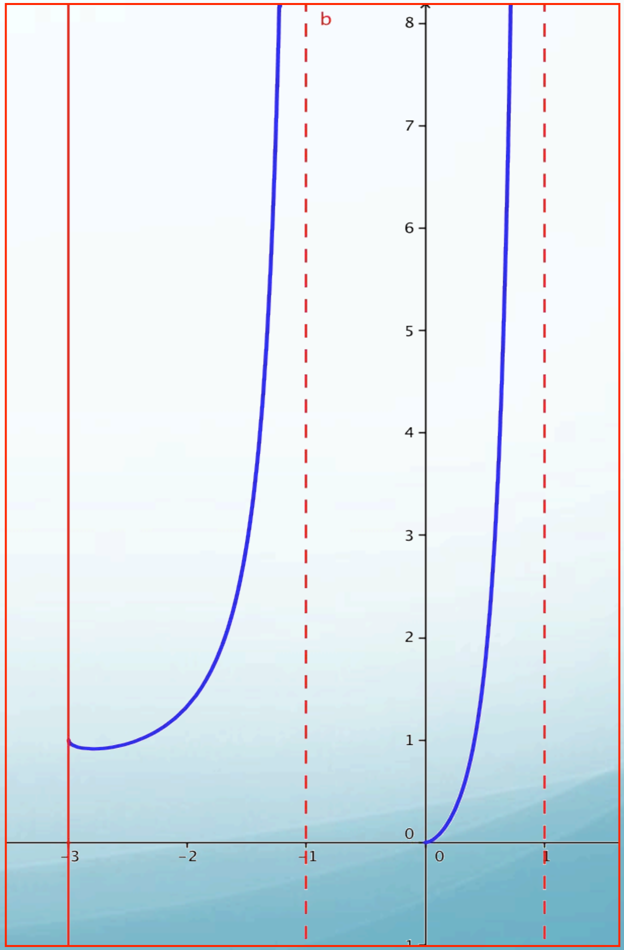


$$y=\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{\sqrt{x+3}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases}\dfrac{2x}{1-x^2}>0\\ x+3\geq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x<-1\cup 0<x<1\\ x\geq -3\end{cases}$$

$$\xrightarrow{soluzione} -3\leq x<-1\cup 0<x<1$$

dominio

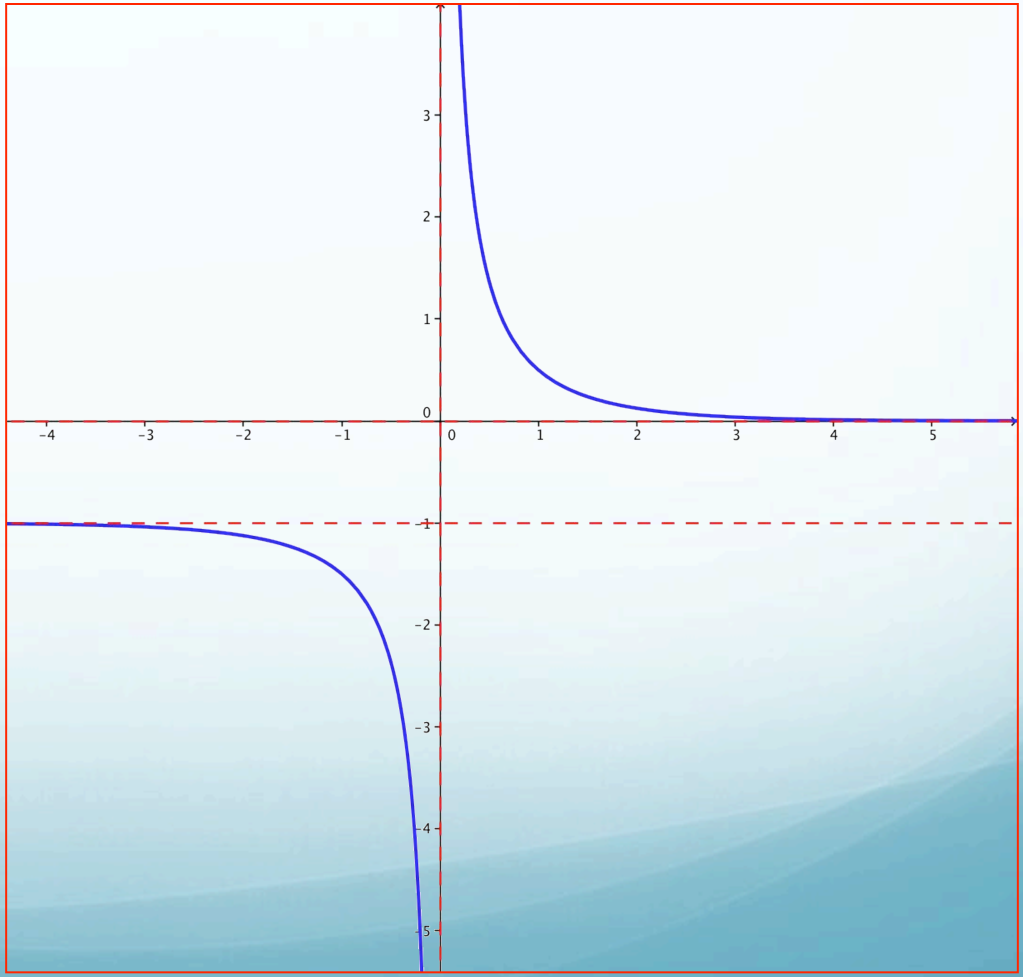
$$D=[-3;-1[\cup]0;1[$$



$$y = \frac{1}{3^x - 1} \xrightarrow{soluzione} x \neq 0$$

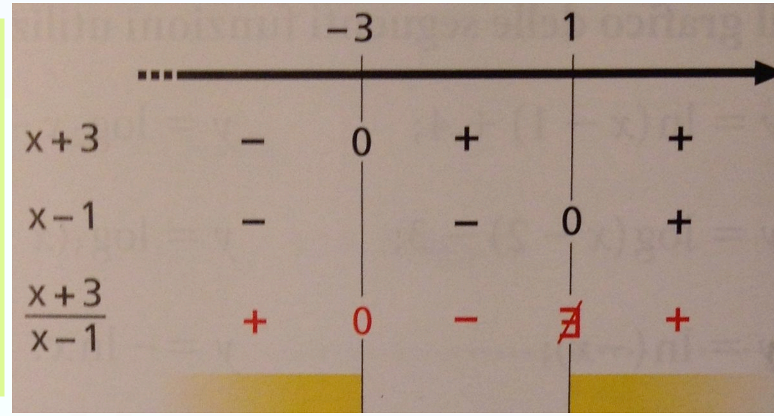
dominio

$$D = \forall x \in \Re - \{0\}$$

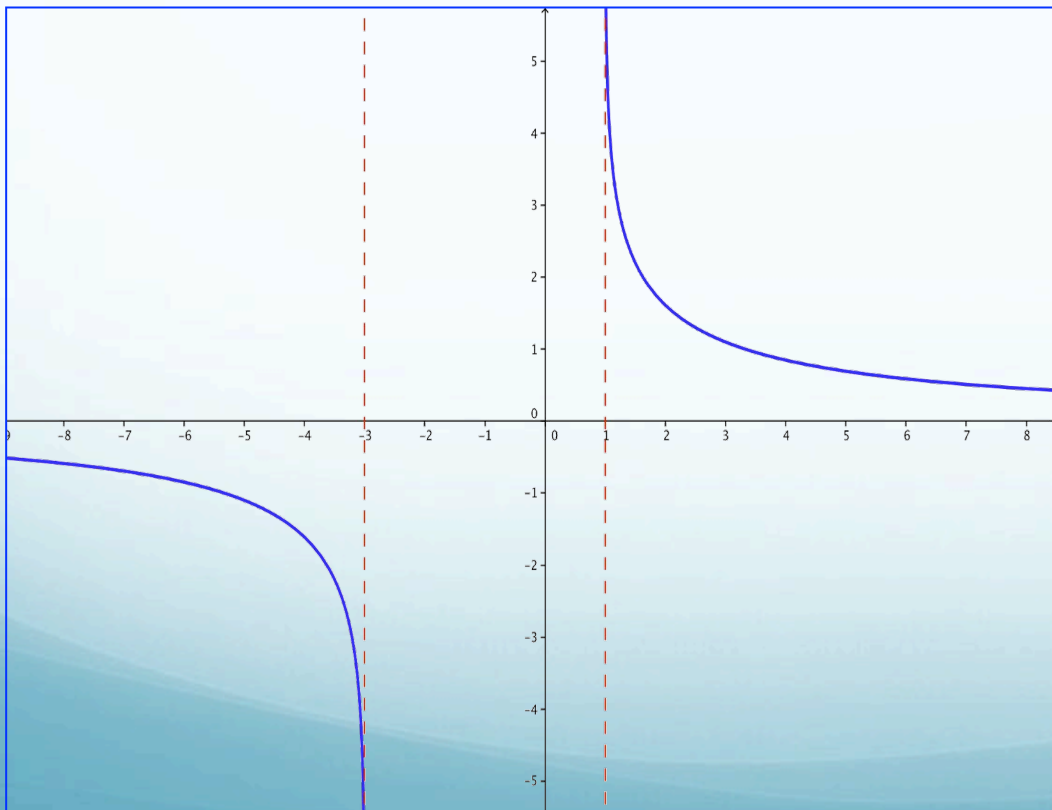


$$y = \log\frac{x+3}{x-1} \xrightarrow{\textit{DOMINIO}} \frac{x+3}{x-1} > 0$$

$$\xrightarrow[\textit{fratta}]{\textit{disequazione}} \begin{cases} N > 0 \rightarrow x+3 > 0 \rightarrow x > -3 \\ D > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \end{cases}$$



$$\boxed{x < -3 \vee x > 1}$$



dominio

$$\boxed{D = \left]-\infty; -3\right[\cup \left]1; +\infty\right[}$$

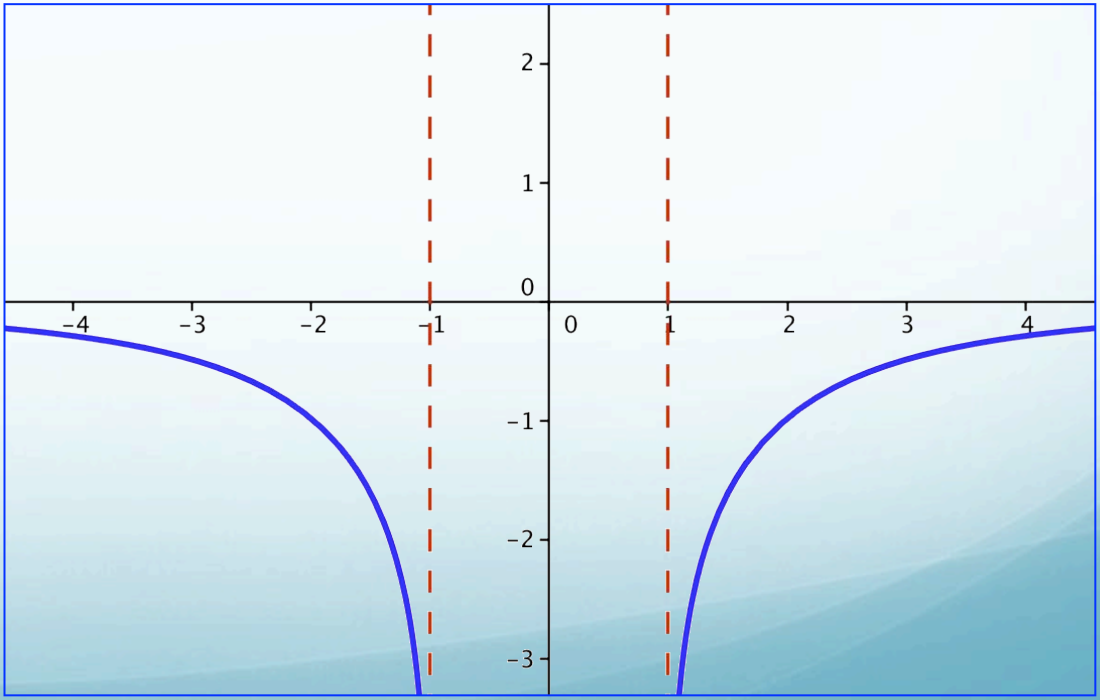
$$y = \log \frac{x^2-1}{x^2+4} \xrightarrow{DOMINIO} \frac{x^2-1}{x^2+4} > 0$$

$$\xrightarrow[\text{disequazione fratta}]{\text{soluzione}} \begin{cases} N>0 \rightarrow x^2-1>0 \rightarrow x<-1 \vee x>1 \\ D>0 \rightarrow x^2+4>0 \rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} x<-1 \vee x>1$$

dominio

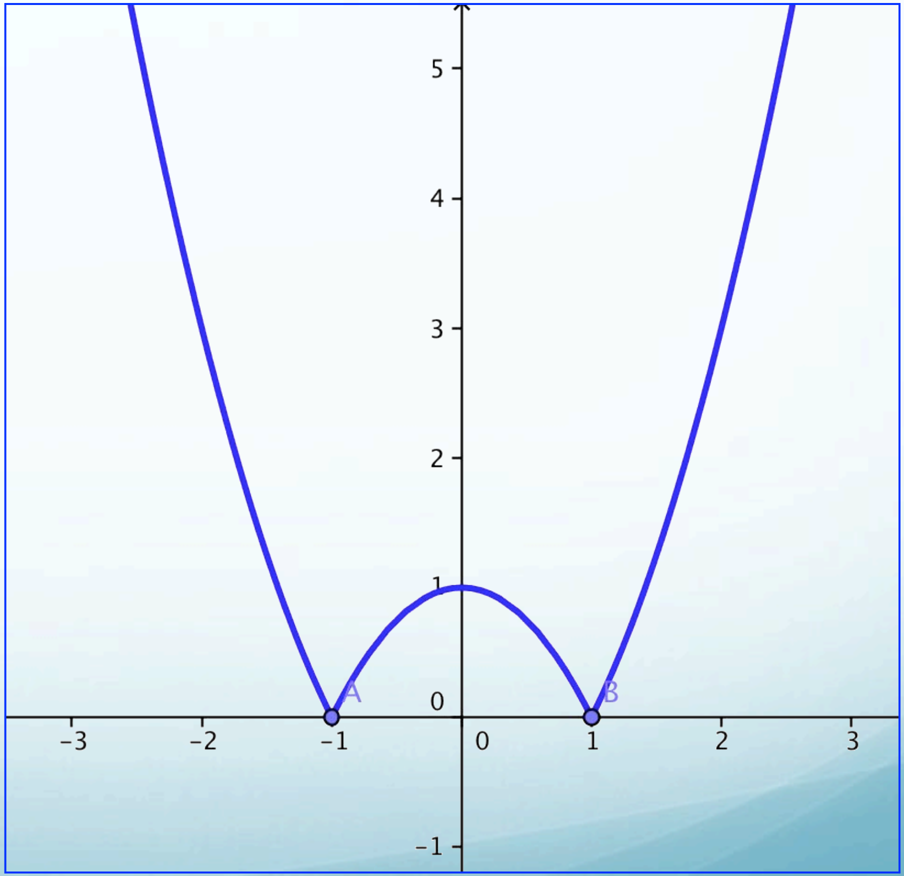
$$D =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$



$$y = \ln\left|x^2 - 1\right| \xrightarrow{DOMINIO} \left|x^2 - 1\right| > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \neq \pm 1$$

dominio

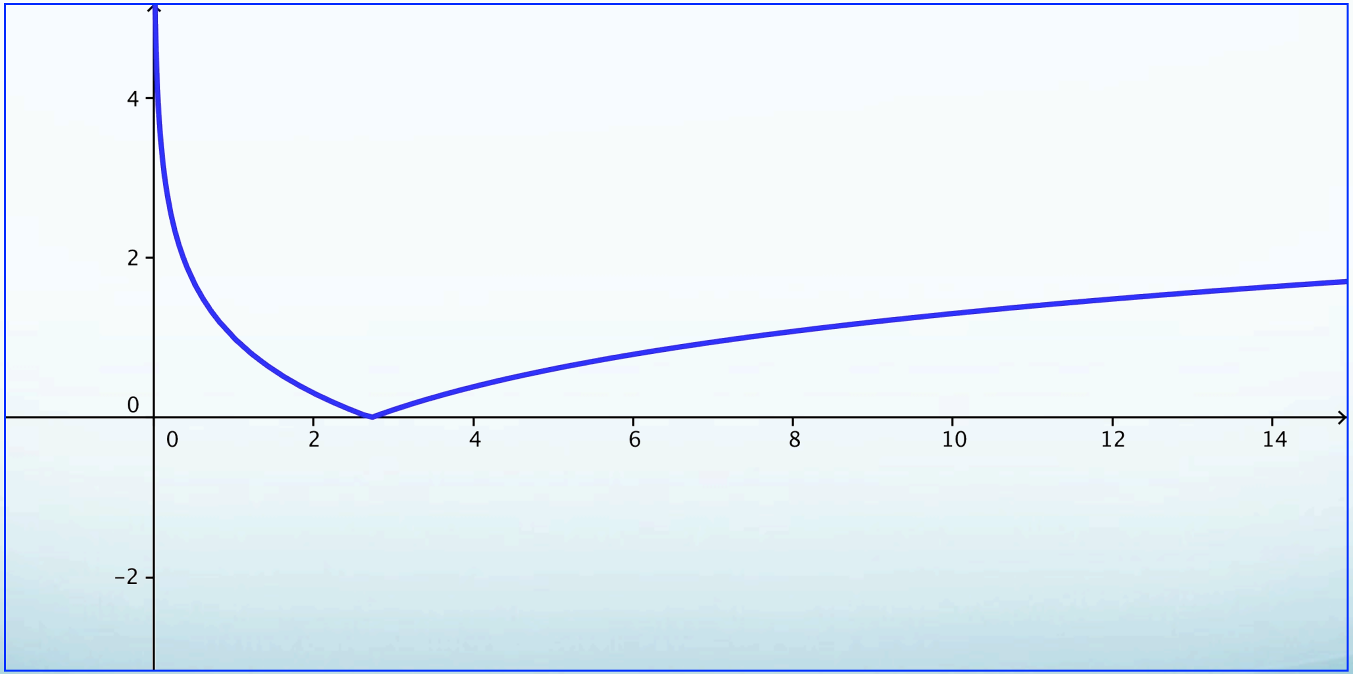
$$D = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$



$$y = \left|1 - \ln x\right| \xrightarrow{soluzione} x > 0$$

dominio

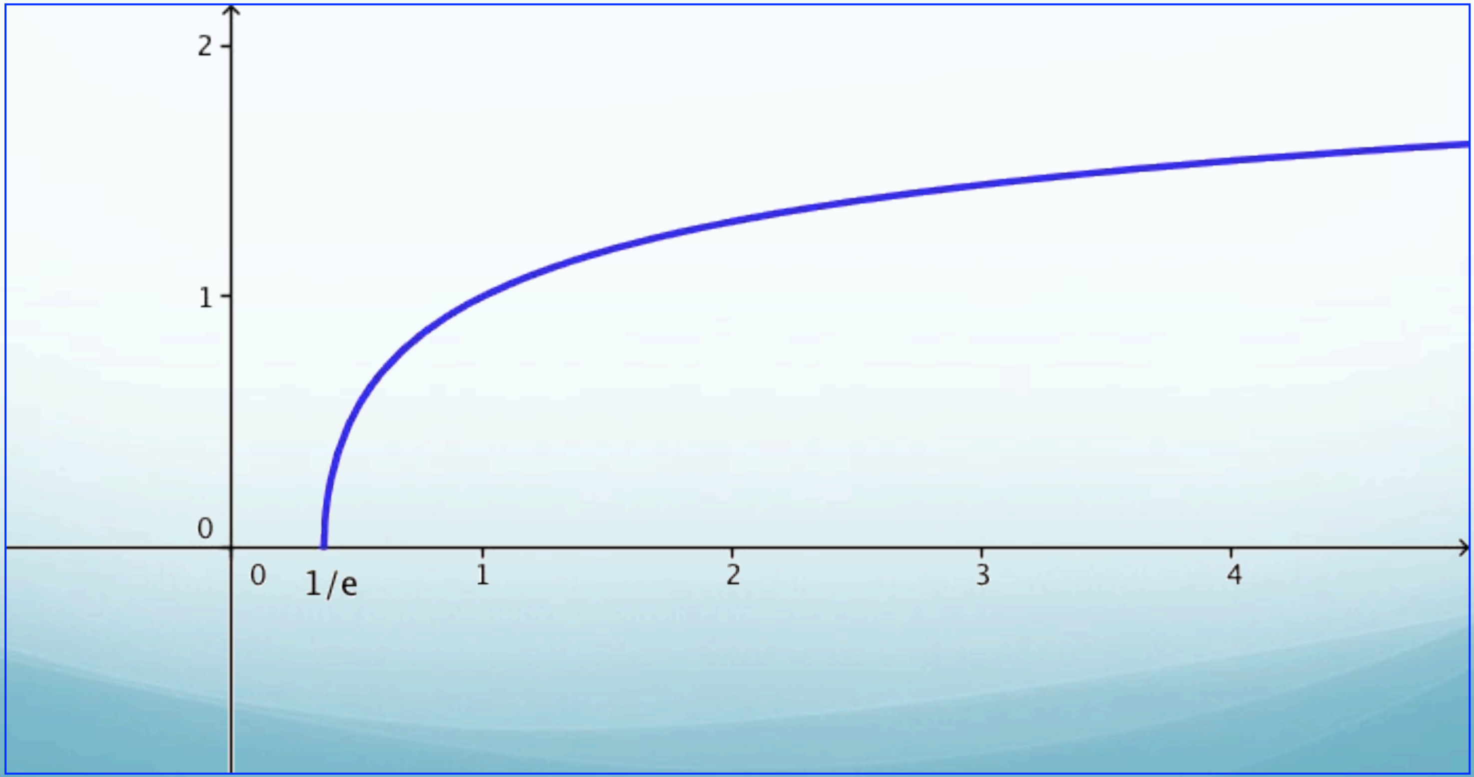
$$D = \left]0;+\infty\right[$$



$$y = \sqrt{\ln x + 1} \xrightarrow{\textit{soluzione}} x \geq \frac{1}{e}$$

dominio

$$D = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$$



$$y=\frac{\ln x}{1-\ln^2 x}\xrightarrow{dominio}\begin{cases} x>0 \to C.E.\ del\ logaritmo \\ 1-\ln^2 x\neq 0 \to C.E.\ frazione \end{cases}$$

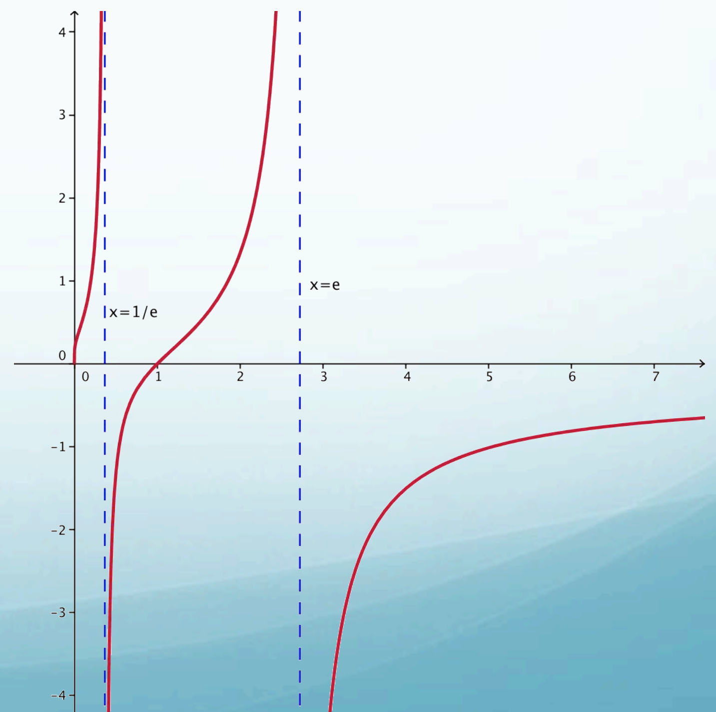
$$\xrightarrow{soluzione}\begin{cases} x>0 \\ x\neq e^{-1}\vee x\neq e \end{cases}\Rightarrow D=R_0^+-\left\{e^{-1};e\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{equazione logaritmica}]{\text{soluzione}} 1-\ln^2 x=0\xrightarrow{z=\ln x}-z^2+1=0\xrightarrow{soluzione} z=\pm 1$$

$$\ln x=-1\xrightarrow[\text{logaritmo}]{\text{definizione}} x=e^{-1} \qquad \ln x=1\xrightarrow[\text{logaritmo}]{\text{definizione}} x=e$$

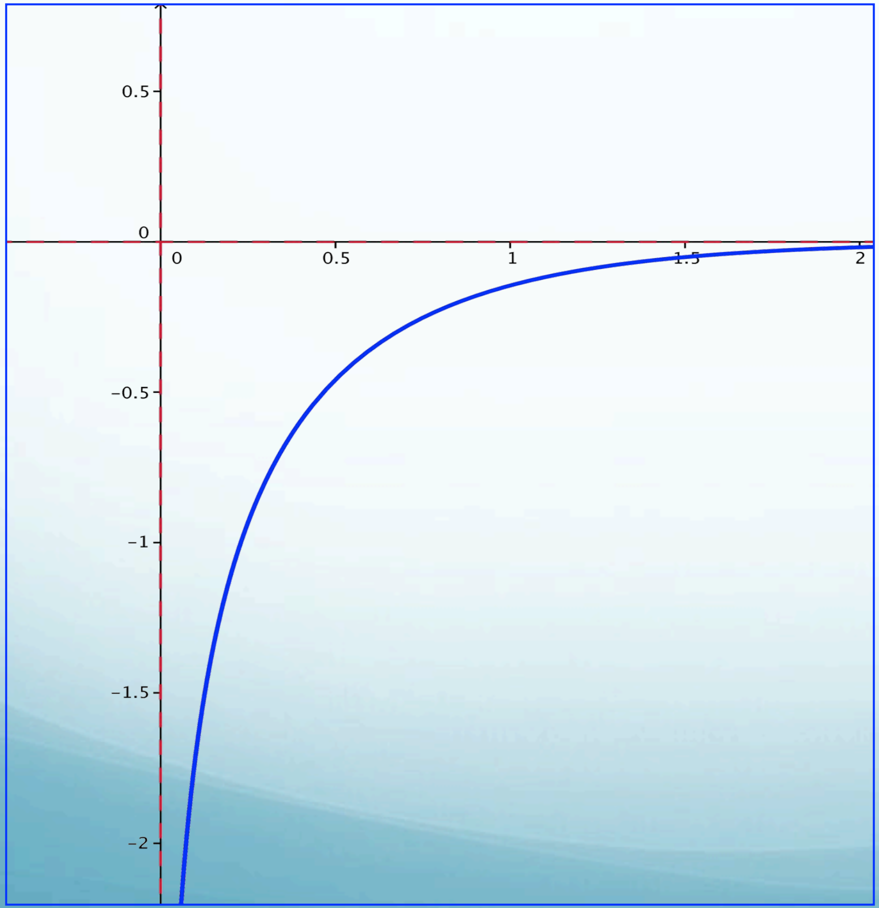
dominio

$$\boxed{D=R_0^+-\left\{e^{-1};e\right\}}$$



$$y = \ln(1 - e^{-2x}) \xrightarrow{dominio} 1 - e^{-2x} > 0 \Rightarrow C.E.\ \log aritmo$$

$$\xrightarrow[disequazione\ \ esponenziale]{soluzione} e^{-2x} < 1 \rightarrow e^{-2x} < e^{0} \xrightarrow{soluzione} -2x < 0 \rightarrow x > 0$$



dominio

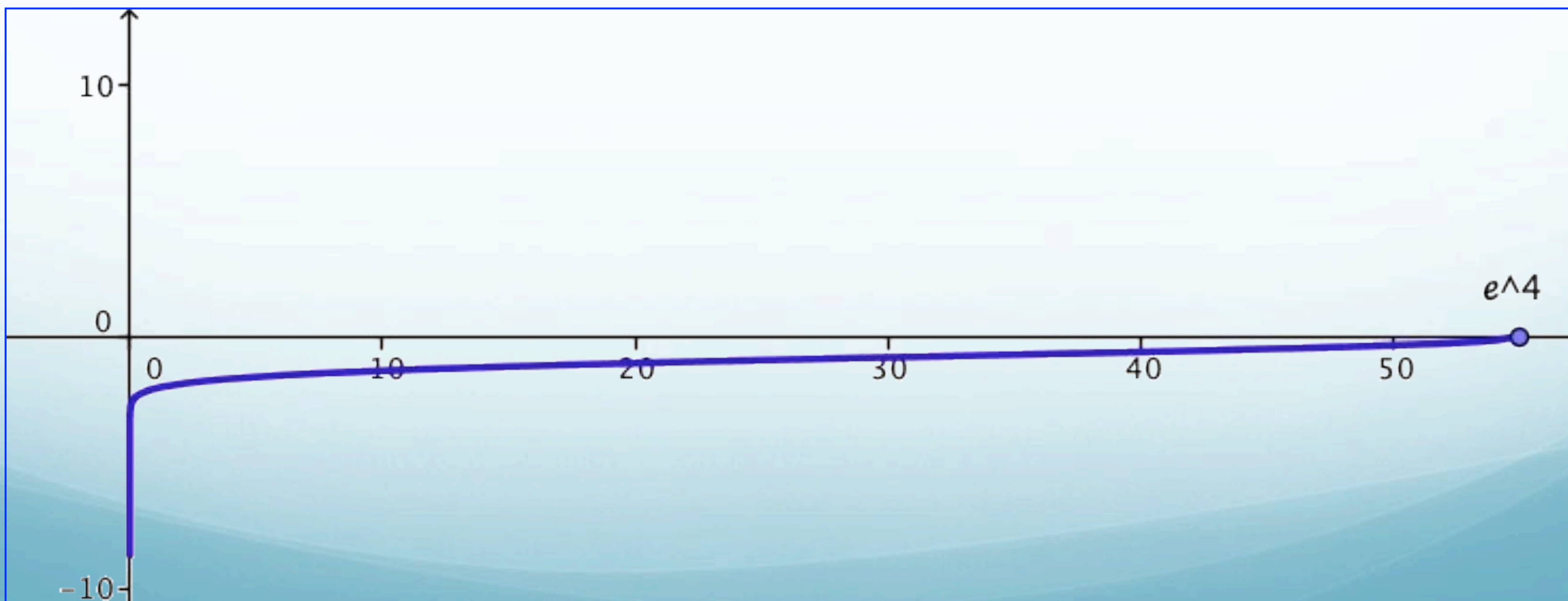
$$\boxed{D = R_0^+ = \left]0;+\infty\right[}$$

$$y=\frac{\ln x-4}{\sqrt{4-\ln x}} \xrightarrow{dominio} \begin{cases} x>0 \Rightarrow C.E.\ \log aritmo \\ 4-\ln x\ge 0 \Rightarrow C.E.\ radice \\ 4-\ln x\ne 0 \Rightarrow C.E.\ frazione \end{cases} \xrightarrow{equivalente} \begin{cases} x>0 \\ 4-\ln x>0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{soluzione \\ disequazione\ \log aritmica}} \ln x<4 \xrightarrow{soluzione} x<e^4 \xrightarrow{\substack{soluzione \\ sistema}} \begin{cases} x>0 \\ x<e^4 \end{cases} \rightarrow 0<x<e^4$$

dominio

$$\boxed{D=\left]0;e^4\right[}$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il dominio e il codominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \frac{x^2 - 2}{x}$; **b)** $y = e^{-x} + 1$; **c)** $y = 2 \operatorname{sen} 3x - 2$.

a) La funzione $y = f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$ è definita per $x \neq 0$.
Ricaviamo la variabile x in funzione della y:

$$x^2 - xy - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8}}{2}.$$

I valori del codominio sono quei valori di y per i quali la x è definita e appartiene al dominio della funzione, cioè $x \neq 0$. Poiché l'espressione di x che abbiamo ottenuto è definita per ogni y reale ed è sempre diversa da 0, il codominio di $f(x)$ è l'insieme $C = \mathbb{R}$.

$y = e^{-x} + 1$

b) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Ricaviamo x in funzione di y:

$$e^{-x} = y - 1 \rightarrow -x = \ln(y-1) \rightarrow$$
$$\rightarrow x = -\ln(y-1).$$

Poiché, per l'esistenza di x, deve essere $y - 1 > 0$, ossia $y > 1$, il codominio è:

C: $y > 1$.

$$y = 2 \operatorname{sen} 3x - 2$$

c) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Troviamo ora le condizioni per y. Si ha

$$\operatorname{sen} 3x = \frac{y+2}{2},$$

e poiché è sempre $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ scriviamo:

$$-1 \leq \frac{y+2}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq y+2 \leq 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow -4 \leq y \leq 0.$$

Quindi il codominio è:

$$C: -4 \leq y \leq 0.$$

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo il segno della seguente funzione nel suo dominio:

$$y = f(x) = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{x+1}}.$$

Determiniamo il dominio:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{esistenza di } \ln x \\ x \neq 0 & \\ x + 1 \neq 0 & \text{esistenza della frazione} \\ x + 1 \geq 0 & \text{esistenza del radicale} \end{cases}$$

Quindi $D: x > 0$.

Per studiare il segno della funzione analizziamo separatamente numeratore e denominatore.

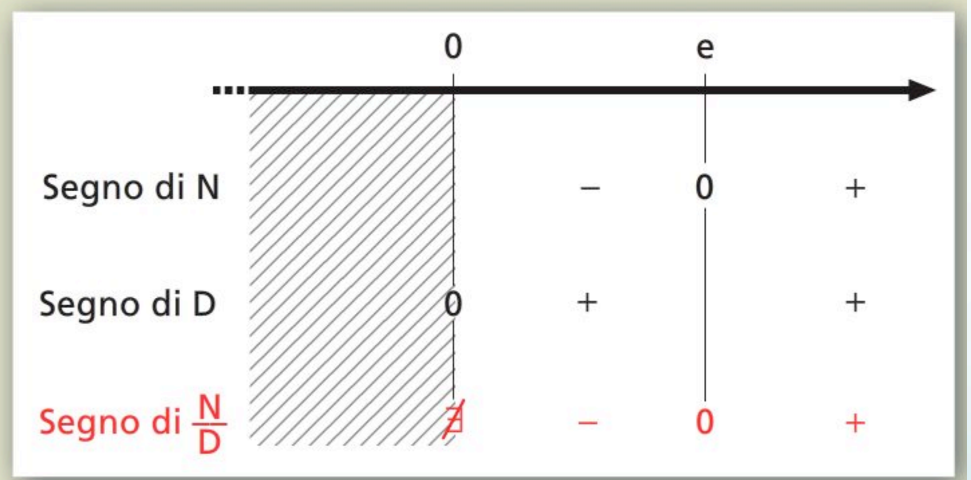
Numeratore:

$\ln x - 1 > 0 \ \rightarrow\ \ln x > 1 \ \rightarrow$
$\rightarrow\ \ln x > \ln e \ \rightarrow\ x > e.$

Denominatore:

$x\sqrt{x+1} > 0 \ \rightarrow\ x > 0$ (essendo il radicale sempre positivo).

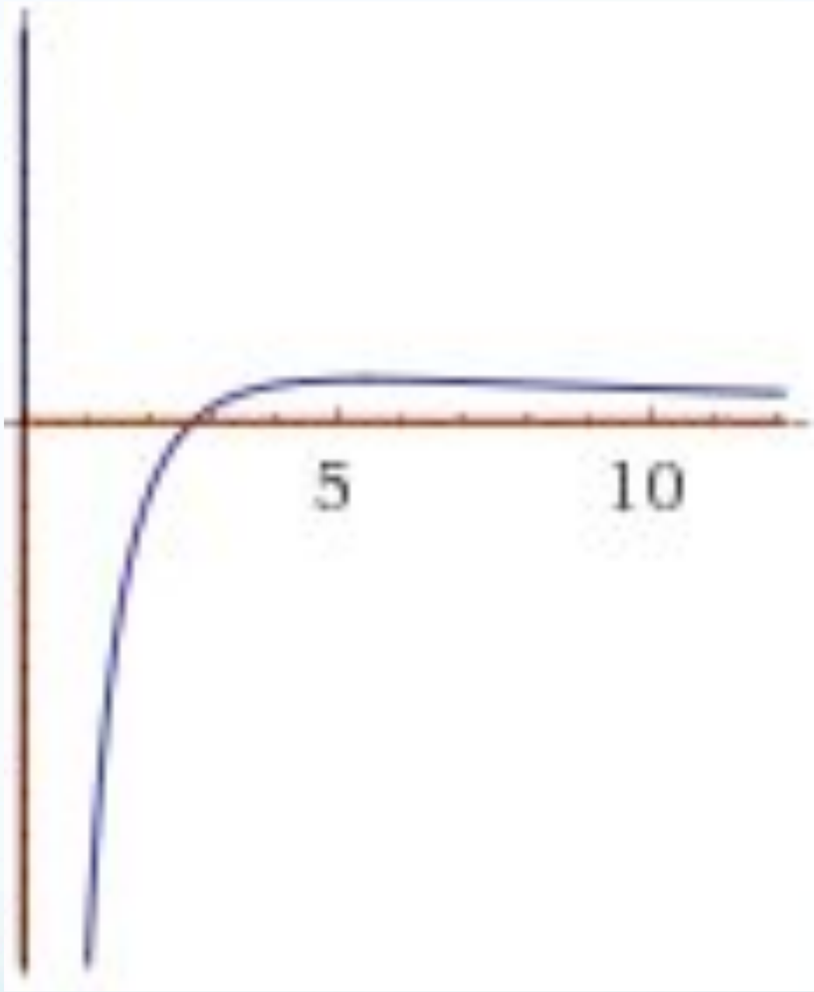
Compiliamo il quadro dei segni:



La funzione $y = f(x)$ esiste soltanto per $x > 0$:

$f(x) > 0$	per	$x > e$;
$f(x) < 0$	per	$0 < x < e$;
$f(x) = 0$	per	$x = e$.

$$y = f(x) = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{x+1}}$$



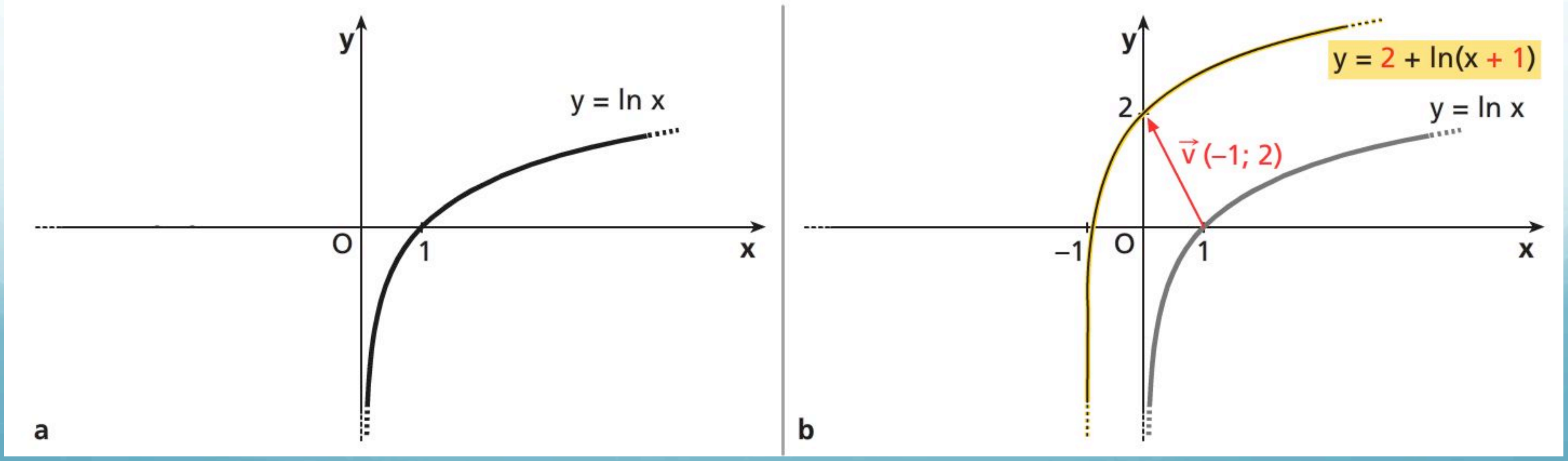
ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = 2 + \ln(x+1)$; **b)** $y = -\operatorname{sen}|x| + 1$; **c)** $y = -2\cos x$.

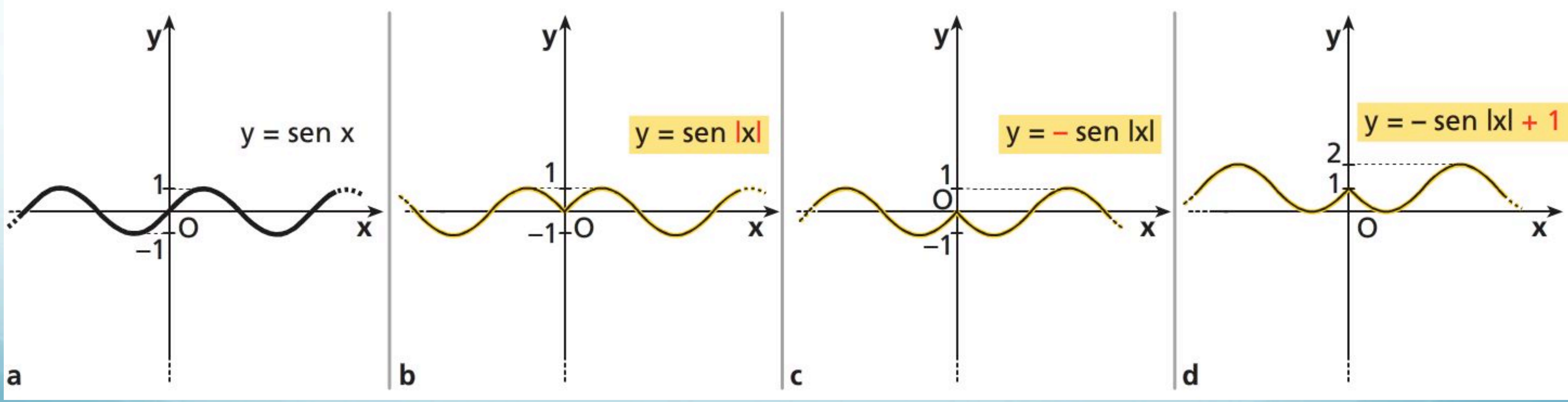
$$\boxed{\text{a) } y = 2 + \ln(x+1)}$$

a) Tracciato il grafico di $y = f(x) = \ln x$ (figura *a*), otteniamo quello di $y = 2 + f(x+1) = 2 + \ln(x+1)$, con una traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 2)$ (figura *b*).



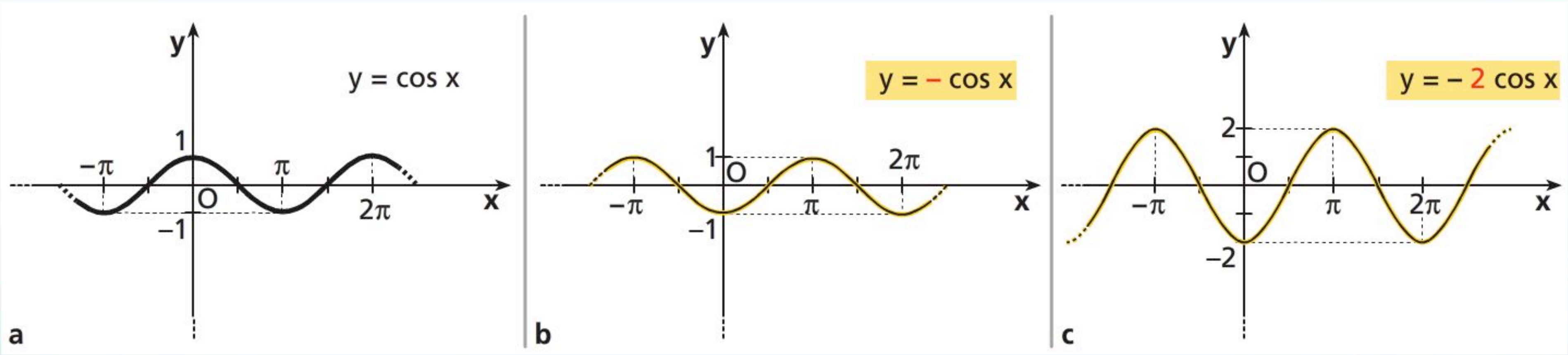
$$\text{b)}\ y = -\operatorname{sen}|x| + 1$$

b) Tracciato il grafico di $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ (figura *a*, sotto), otteniamo quello di $y = f(|x|) = \operatorname{sen}|x|$ per $x < 0$ con una simmetria rispetto all'asse y del grafico di $y = f(x)$ che si ha per $x \geq 0$ e che rimane invariato (figura *b*, sotto).
Otteniamo poi il grafico di $y = -\operatorname{sen}|x|$ con una simmetria rispetto all'asse x (figura *c*). Eseguiamo poi una traslazione di vettore $\vec{v}(0;1)$ per ottenere il grafico di $y = -\operatorname{sen}|x| + 1$ (figura *d*).



c) $y = -2\cos x$

c) Tracciato il grafico di $y = f(x) = \cos x$ (figura *a*, sotto), otteniamo quello di $y = -f(x) = -\cos x$ con una simmetria rispetto all'asse x del grafico di $y = f(x)$ (figura *b*, sotto).
Otteniamo poi il grafico di $y = -2\cos x$ con una dilatazione verticale con $n = 2$ (figura *c*, sotto).



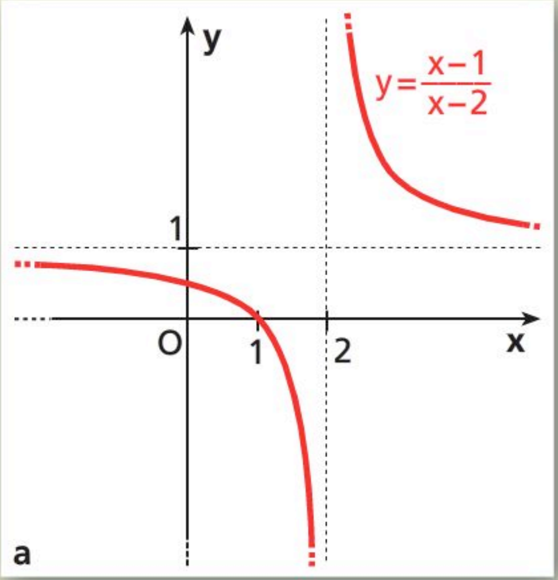
ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico delle seguenti funzioni:

$$\boxed{y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}}$$

a) La funzione $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ ha come grafico una funzione omografica e cioè un'iperbole equilatera con asintoti $x = 2$ e $y = 1$ (figura *a*).

Ha il centro di simmetria in $(2; 1)$ e interseca gli assi cartesiani in $(1; 0)$ e $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.



$$y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

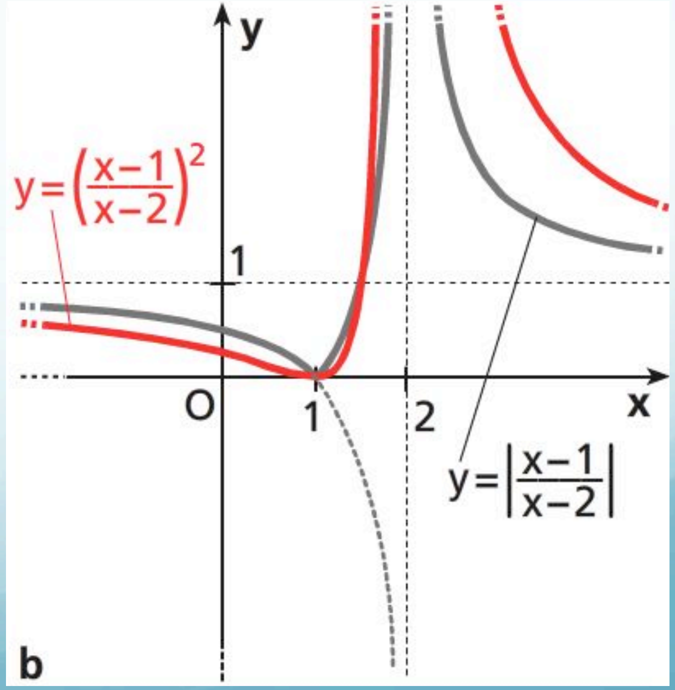
$$y = f^2(x)$$

b) Per il grafico di $y = f^2(x)$ (figura *b*) conviene disegnare subito il grafico di $|f(x)|$ e poi sfruttare le seguenti informazioni:

1. per $x = 0$ si ha $f(x) = \frac{1}{2}$, quindi $f^2(x) = \frac{1}{4}$;

2. nell'intervallo in cui $|f(x)| < 1$ si ha $f^2(x) < |f(x)|$;

3. negli intervalli in cui $|f(x)| > 1$ si ha $f^2(x) > |f(x)|$.



$$y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\boxed{y = \sqrt{f(x)}}$$

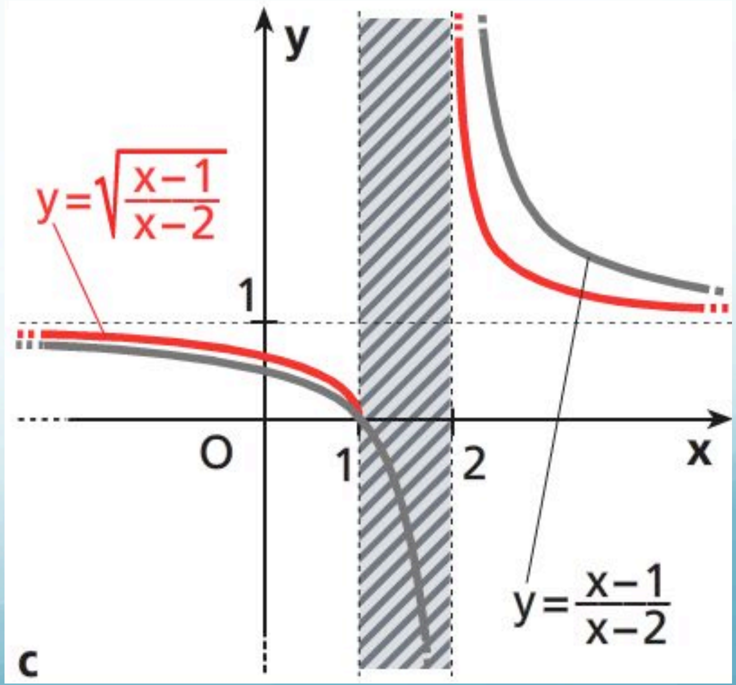
c) L'andamento del grafico di $y = \sqrt{f(x)}$ (figura *c*) si ottiene utilizzando le seguenti informazioni:

1. per $1 < x < 2$, $f(x) < 0$, quindi $\sqrt{f(x)}$ non esiste;

2. per $x = 1$, $f(x) = 0$, quindi $\sqrt{f(x)} = 0$;

3. per $x < 1$, $0 < f(x) < 1$, quindi $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;

4. per $x > 2$, $f(x) > 1$, quindi $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.



$$y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

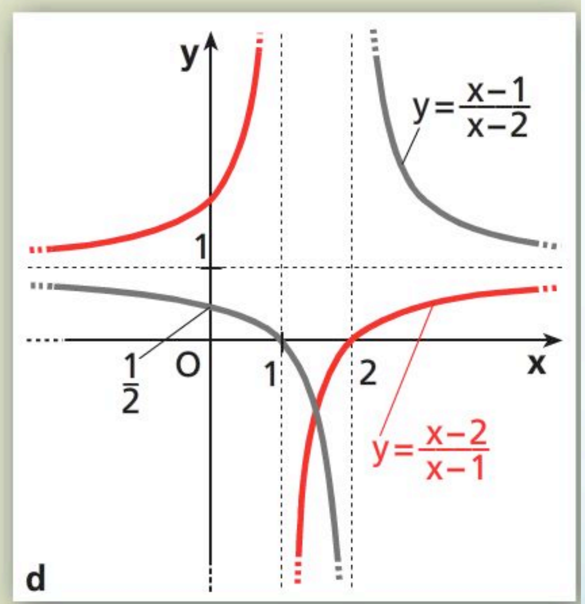
$$\boxed{y = \frac{1}{f(x)}}$$

d) Le informazioni utili per disegnare il grafico di $y = \dfrac{1}{f(x)}$ (figura *d*) sono:

1. il valore di x per cui $f(x) = 0$, e cioè $x = 1$; per x che tende a 1: se $f(x) > 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a $+\infty$; se $f(x) < 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a $-\infty$;

2. il valore di x per cui $f(x)$ tende a $\pm\infty$, e cioè $x = 2$; per x che tende a 2, $f(x)$ tende a $\pm\infty$, quindi $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a 0;

3. il valore di x per cui $f(x) = \pm 1$; poiché per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$, $f(x)$ tende a 1, anche $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a 1.



ESERCIZIO GUIDA

Dimostriamo che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{4^x + 8}$ è decrescente nel suo dominio.

Poiché il denominatore non si annulla mai, il dominio è D: $\mathbb{R}$.
Una funzione è decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Nel nostro caso si ha:

$$x_1 < x_2 \rightarrow 4^{x_1} < 4^{x_2} \rightarrow 4^{x_1} + 8 < 4^{x_2} + 8 \rightarrow \frac{1}{4^{x_1} + 8} > \frac{1}{4^{x_2} + 8}.$$

Quindi la funzione è decrescente.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il periodo delle seguenti funzioni:

a) $y = \cos\frac{2}{5}x$; **b)** $y = \mathrm{tg}\, 4x + \mathrm{sen}\,\frac{3}{2}x$.

Se $f(x)$ è una funzione di periodo T_1 e $m > 0$, allora $f(mx)$ è periodica di periodo $T = \frac{T_1}{m}$.

a) Il periodo della funzione $y = \cos x$ è 2π, quindi il periodo cercato è $T = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$.

b) Il periodo della funzione si ottiene calcolando il m.c.m. dei periodi delle due funzioni $\mathrm{tg}\, 4x$ e $\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}x$.

Poiché il periodo di $y = \mathrm{tg}\, x$ è π, il periodo di $y = \mathrm{tg}\, 4x$ è $T_1 = \frac{\pi}{4}$, mentre il periodo di $y = \mathrm{sen}\,\frac{3}{2}x$ è $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi$. Calcoliamo:

$$\text{m.c.m.}\left(\frac{\pi}{4}; \frac{4}{3}\pi\right) = \pi \cdot \text{m.c.m.}\left(\frac{1}{4}; \frac{4}{3}\right) = \pi \cdot \text{m.c.m.}\left(\frac{3}{12}; \frac{16}{12}\right) = \frac{\pi}{12} \cdot \text{m.c.m.}\,(3; 16) = \frac{\pi}{12} \cdot 48 = 4\pi.$$

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{1 - 4x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$$1 - 4x^2 \neq 0 \rightarrow 4x^2 \neq 1 \rightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \rightarrow D: x \neq \pm \frac{1}{2},$$

Preso un generico x del dominio, sostituiamo il suo opposto nella funzione:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - |-x|}{1 - 4(-x)^2} = \frac{x^2 - |x|}{1 - 4x^2} = f(x).$$

Quindi la funzione è pari.

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

b) Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$$\sqrt[3]{x^2} \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 0 \rightarrow D: x \neq 0.$$

Preso un generico x del dominio, sostituiamo il suo opposto nella funzione:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{-x^3 + x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-(x^3 - x)}{\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}} = -f(x).$$

La funzione è dunque dispari.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'espressione della funzione inversa delle seguenti funzioni e il relativo dominio.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$; **b)** $f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) La funzione $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Determiniamo la relazione inversa ricavando x,

$$1 + e^x = \frac{1}{y} \rightarrow e^x = \frac{1}{y} - 1 \rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right),$$

e notiamo che è una funzione perché a ogni valore di y corrisponde un solo valore di x. Quindi scriviamo la funzione inversa scambiando x con y:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Il dominio di $f^{-1}(x)$, che coincide con il codominio di $f(x)$, si ottiene risolvendo la disequazione $\dfrac{1}{x} - 1 > 0$. Esso risulta essere l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

b) Anche la funzione $y = 1 + 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Ricaviamo la relazione inversa:

$$2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = y - 1 \;\rightarrow\; \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{y-1}{2}.$$

La funzione $y = \text{sen}\,\alpha$ è invertibile se $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Nel nostro caso deve essere $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, e cioè:

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi.$$

Scriviamo allora la funzione inversa:

$$x - \frac{\pi}{4} = \text{arcsen}\,\frac{y-1}{2} \;\rightarrow\; x = \text{arcsen}\,\frac{y-1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Scambiamo x con y e scriviamo:

$$f^{-1}(x) = \text{arcsen}\,\frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Questa funzione è definita per quei valori di x tali che $-1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$, cioè per $-1 \leq x \leq 3$.

ESERCIZIO GUIDA

Date le seguenti funzioni f e g, determiniamo $f \circ g$ e $g \circ f$:

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^2 - 2x.$$

- Possiamo effettuare la composizione $f \circ g$ solo se il codominio di g è contenuto nel dominio di f.
  La funzione f è definita per $x > 0$, per cui occorre che:

  $$g(x) = x^2 - 2x > 0, \text{ cioè } x < 0 \vee x > 2.$$

  Quindi $f \circ g$ è definita sull'insieme $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.
  Per determinare la sua espressione, applichiamo alla variabile x la funzione g, per ottenere $z = g(x)$, e a z la funzione f, per ottenere $y = f(z)$:

  $$z = x^2 - 2x \text{ e } y = \ln z = \ln(x^2 - 2x).$$

  La funzione $f \circ g:]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\to \mathbb{R}$ è $y = \ln(x^2 - 2x)$.

- Poiché la funzione g è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione composta $g \circ f$ è sempre definita e il suo dominio coincide con quello di f, cioè $]0; +\infty[$. Per determinare $g \circ f$, applichiamo alla variabile x la funzione f, per ottenere $z = f(x)$, e a z la funzione g, per ottenere $y = g(z)$:

  $$z = \ln x \quad \text{e} \quad y = z^2 - 2z = \ln^2 x - 2 \ln x.$$

  La funzione $g \circ f:]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ è $y = \ln^2 x - 2 \ln x$.

Studio di una funzione

primi elementi

Ad ogni funzione corrisponde un grafico, quindi studiare una funzione significa determinare il suo grafico. Per le conoscenze fin qui acquisite, di una funzione siamo in grado di studiare:

❖ TIPO DI FUNZIONE - Stabilire se si tratta di una funzione algebrica (intera, fratta, irrazionale) o trascendente (esponenziale, logaritmica, trigonometrica).

❖ SIMMETRIE – Stabilire se la funzione presenta delle simmetrie, ossia se è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) o è dispari (simmetrica rispetto all'origine).

- DOMINIO O CAMPO DI ESISTENZA - Rappresenta l'insieme dei valori che può assumere la variabile indipendente x, in corrispondenza dei quali la funzione y esiste, ossia assume valori che appartengono all'insieme dei numeri reali R.

- INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI - Determinare i punti d'intersezione della funzione con gli assi cartesiani.

- COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE NEI PUNTI DI DISCONTINUITA' – Studiare il comportamento della funzione nei punti che non fanno parte del dominio, ossia capire in che modo la funzione tende all'infinito in questi punti.

- SEGNO DELLA FUNZIONE - Determinare per quali valori della variabile x la funzione y assume valori positivi e negativi, cioè stabilire in quale zona del piano cartesiano la funzione è positiva ed in quale è negativa.

- GRAFICO DELLA FUNZIONE – Riportare su un sistema di assi cartesiani tutte le informazioni ricavate ai punti precedenti al fine di ottenere una situazione visiva del comportamento della funzione.

Esercizi

Studiare le seguenti funzioni.

$$y = x^4 - 3x^2 + 2$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché non esistono limitazioni per x, si ha D: $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. Controlliamo se la funzione presenta delle simmetrie.
Essendo $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$, la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$$ il punto di intersezione con l'asse y è $A(0; 2)$.

Asse x:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

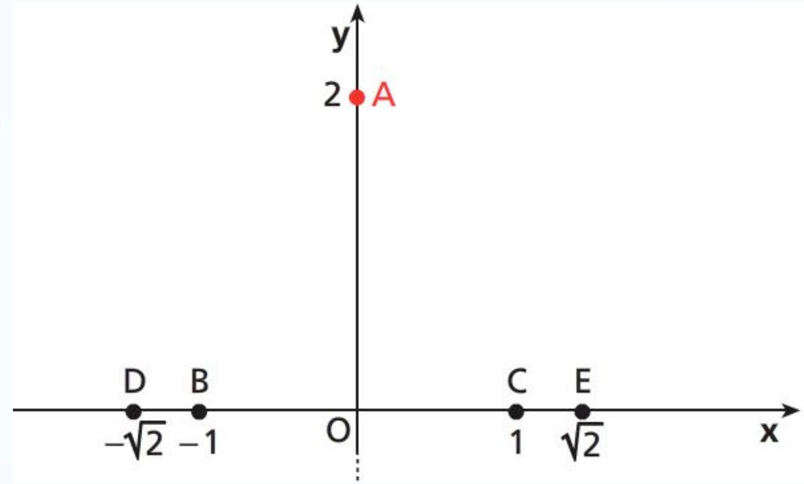
L'equazione ha per soluzioni:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\sqrt{2},\ x_4 = \sqrt{2}\,.$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$B(-1; 0)$, $C(1; 0)$,

$D(-\sqrt{2}; 0)$, $E(\sqrt{2}; 0)$.



4. Studiamo il segno della funzione.

$$x^4 - 3x^2 + 2 > 0$$

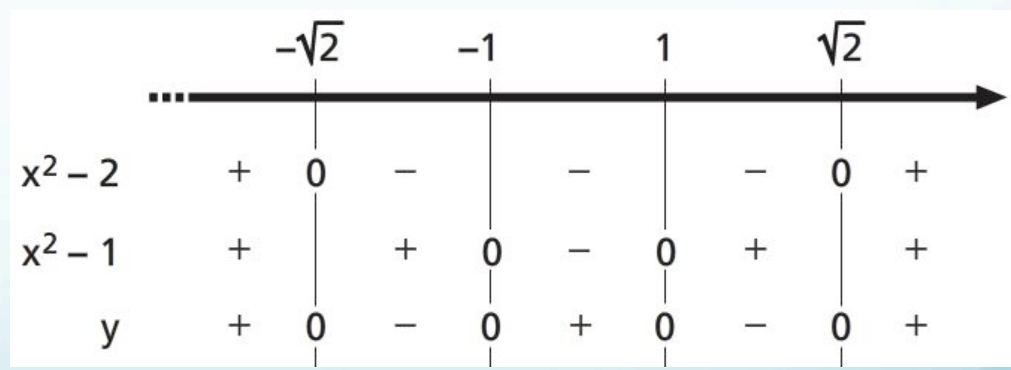
$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0.$$

Primo fattore:

$$x^2 - 2 > 0 \text{ per } x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\,.$$

Secondo fattore:

$$x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \ \vee\ x > 1.$$

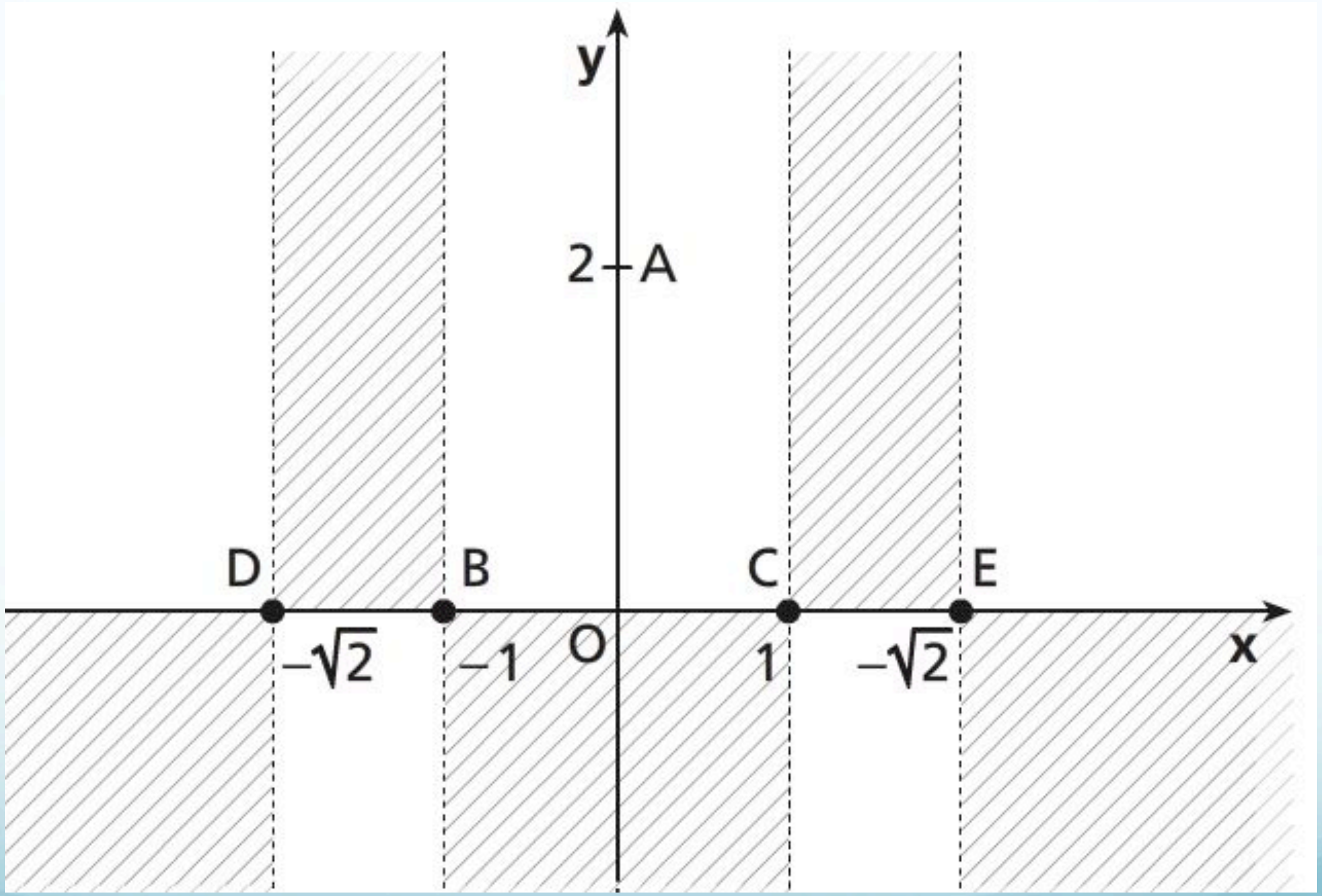


Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

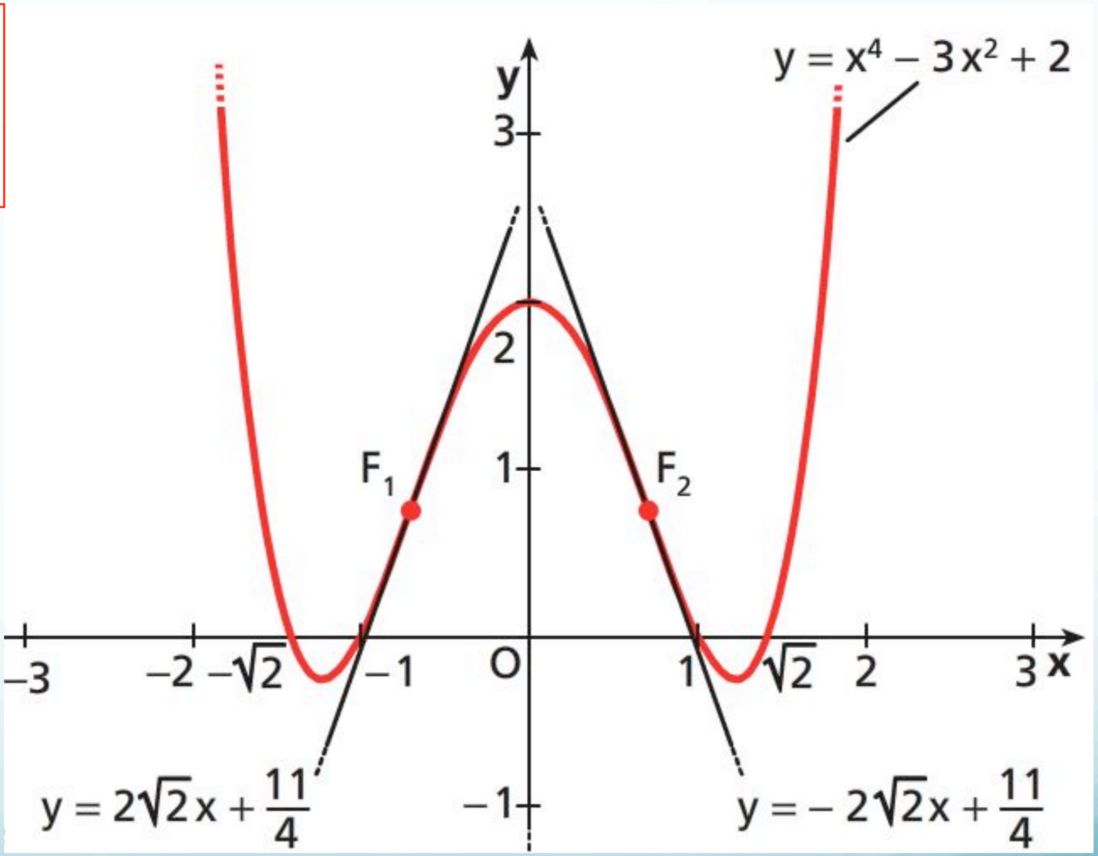
$f(x) > 0$,

per $x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{2}\,.$

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Si tratta di una funzione razionale fratta il cui denominatore deve essere non nullo. Quindi:

$D: \mathbb{R} - \{0\}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x).$$

Poiché $f(-x) = -f(x)$, la funzione è dispari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y: nessuna intersezione, essendo $x = 0$ escluso dal dominio.

Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1}{x} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

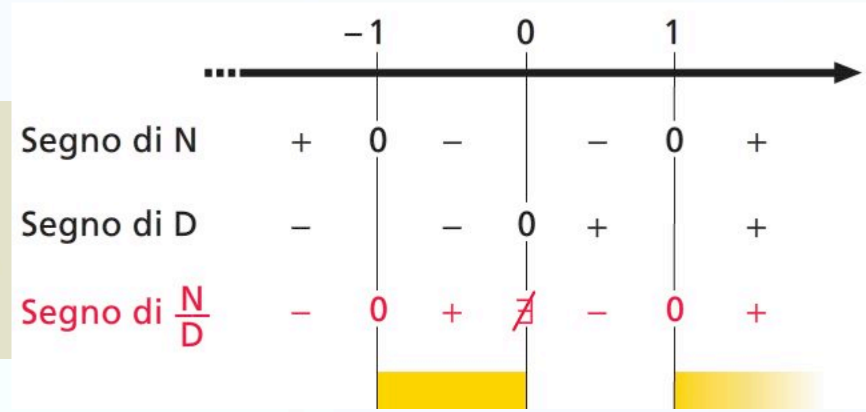
I punti di intersezione con l'asse x sono:

$A(-1; 0)$, $B(1; 0)$.

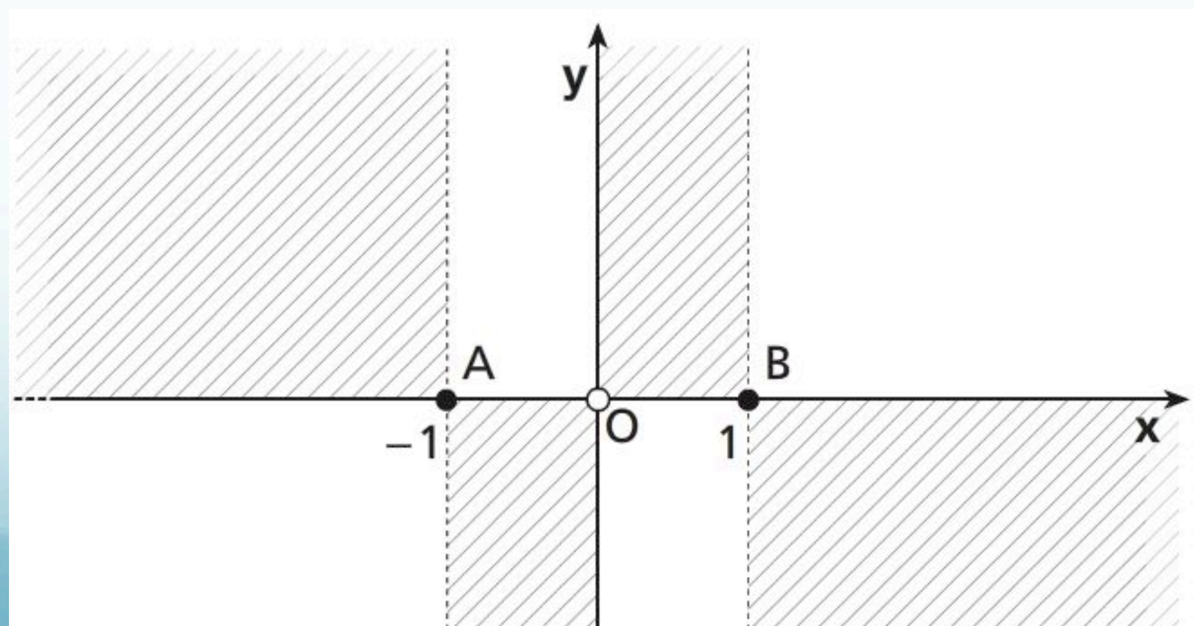
4. Studiamo il segno della funzione.

$$\frac{x^2-1}{x} > 0 \qquad N > 0 \text{ per } x < -1 \lor x > 1,$$

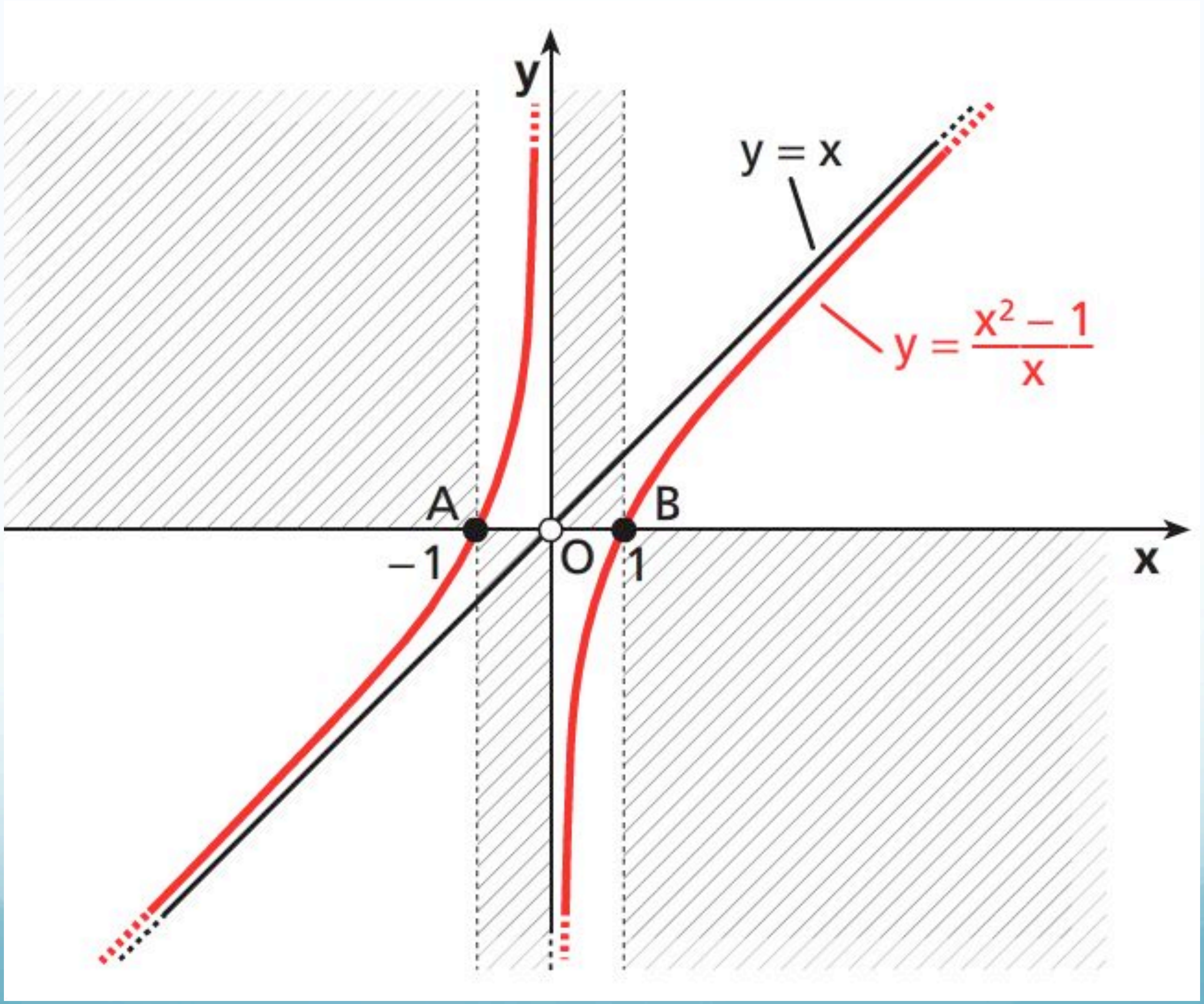
$$D > 0 \text{ per } x > 0.$$



Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)}$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Il suo denominatore deve essere non nullo.

   Quindi:

   D: $x \neq 4$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

   $$f(-x) = \frac{[2-(-x)]^3}{3(-x-4)} = \frac{(2+x)^3}{-3(x+4)}.$$

   Poiché $f(-x) \neq -f(x)$ e $f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è né dispari né pari.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{-12} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

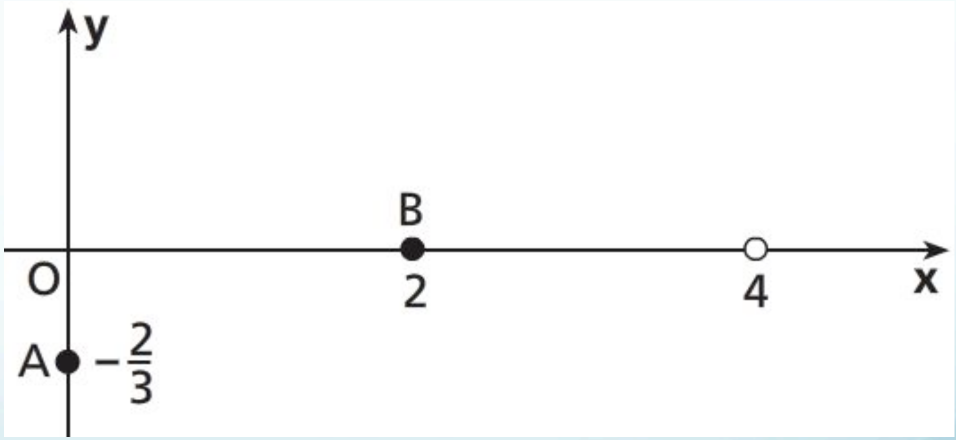
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-x)^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è $B(2; 0)$.



4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{(2-x)^3}{3(x-4)} > 0 \qquad N > 0 \ \text{per} \ x < 2$$

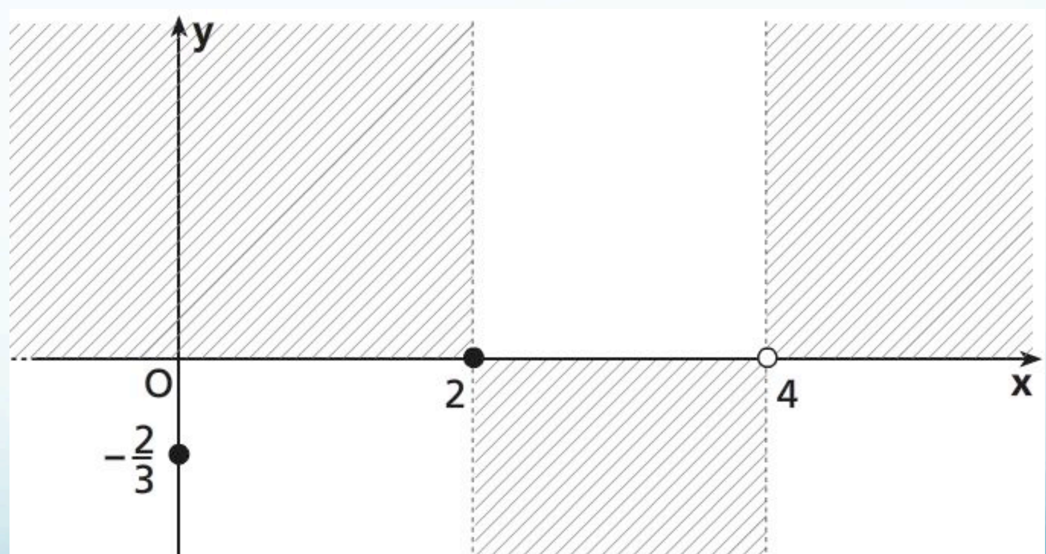
$$D > 0 \ \text{per} \ x > 4.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).

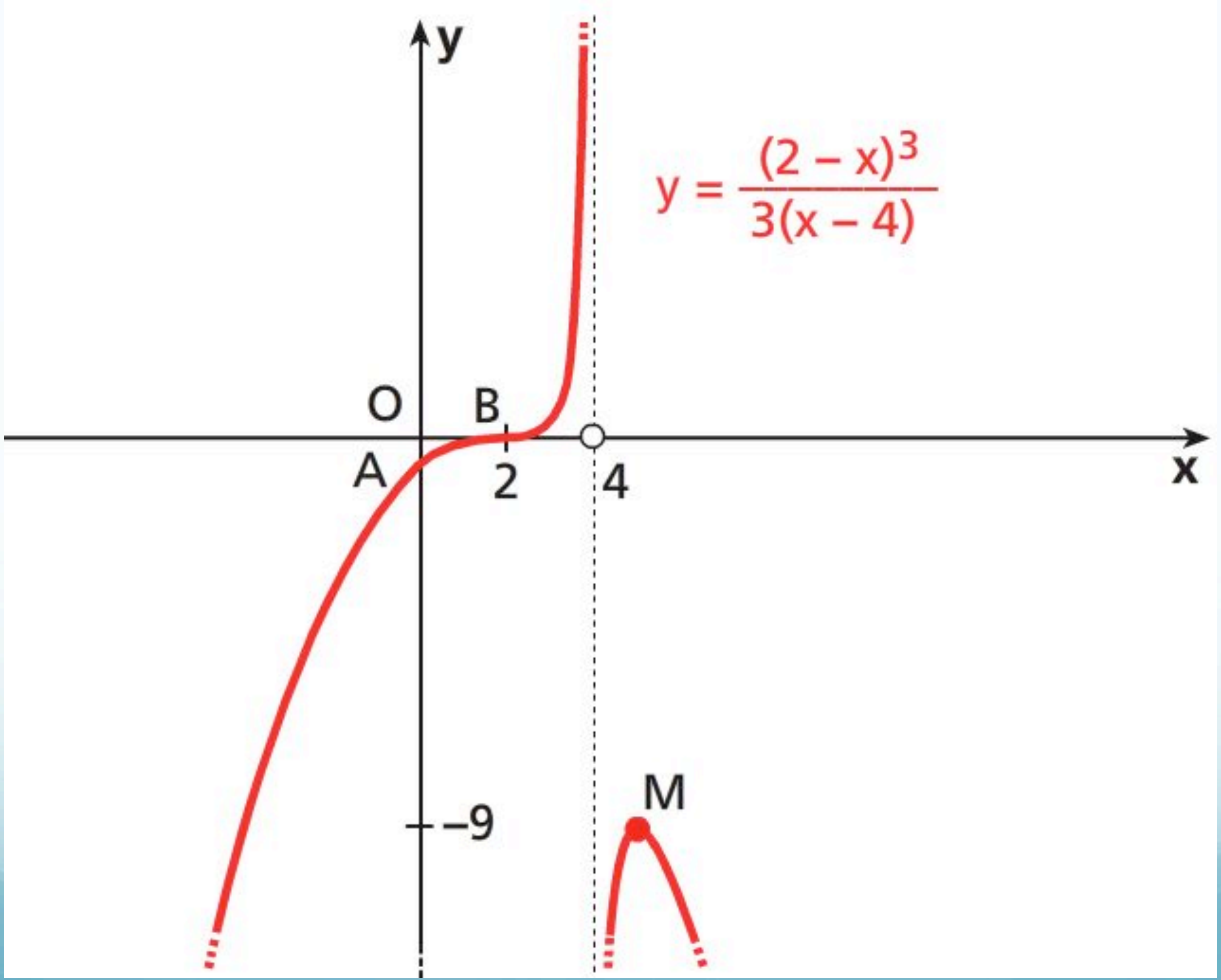
$f(x) > 0 \qquad$ per $2 < x < 4$.

		2		4	
$(2-x)^3$	+	0	−		−
$3(x-4)$	−		−	0	+
y	−	0	+	$\nexists$	−

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



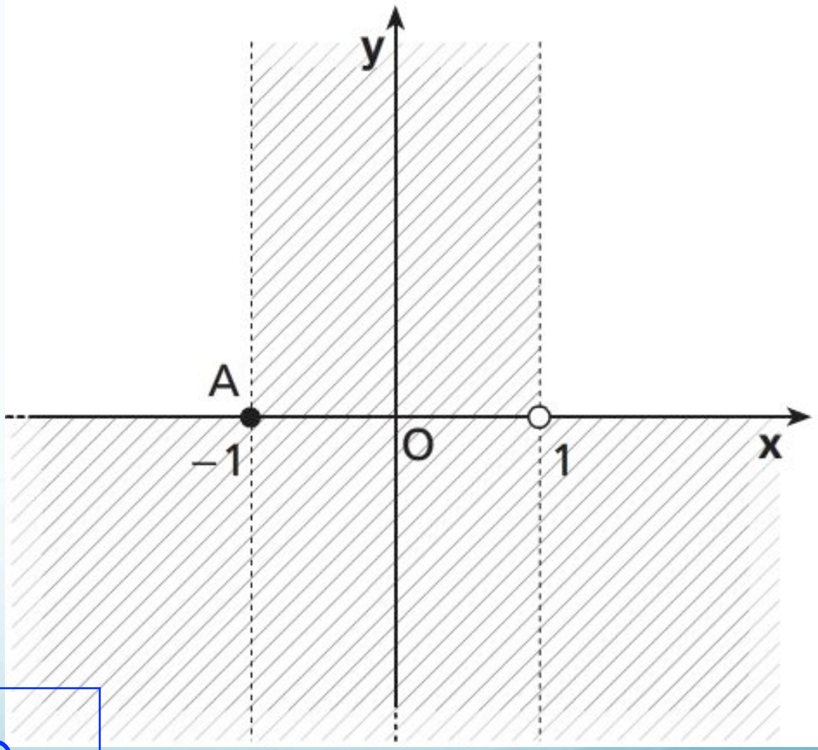
$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

1. Determiniamo il dominio della funzione

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \quad \text{per } x \leq -1 \vee x > 1.$$

Il dominio della funzione è

$$x \leq -1 \ \vee \ x > 1$$



La funzione non esiste nelle zone tratteggiate del piano cartesiano.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo:

$$f(-x) = \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Essendo

$$f(-x) \neq \pm f(x),$$

la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

Non esiste intersezione con l'asse y in quanto $x = 0$ è escluso dal dominio.

Calcoliamo l'intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

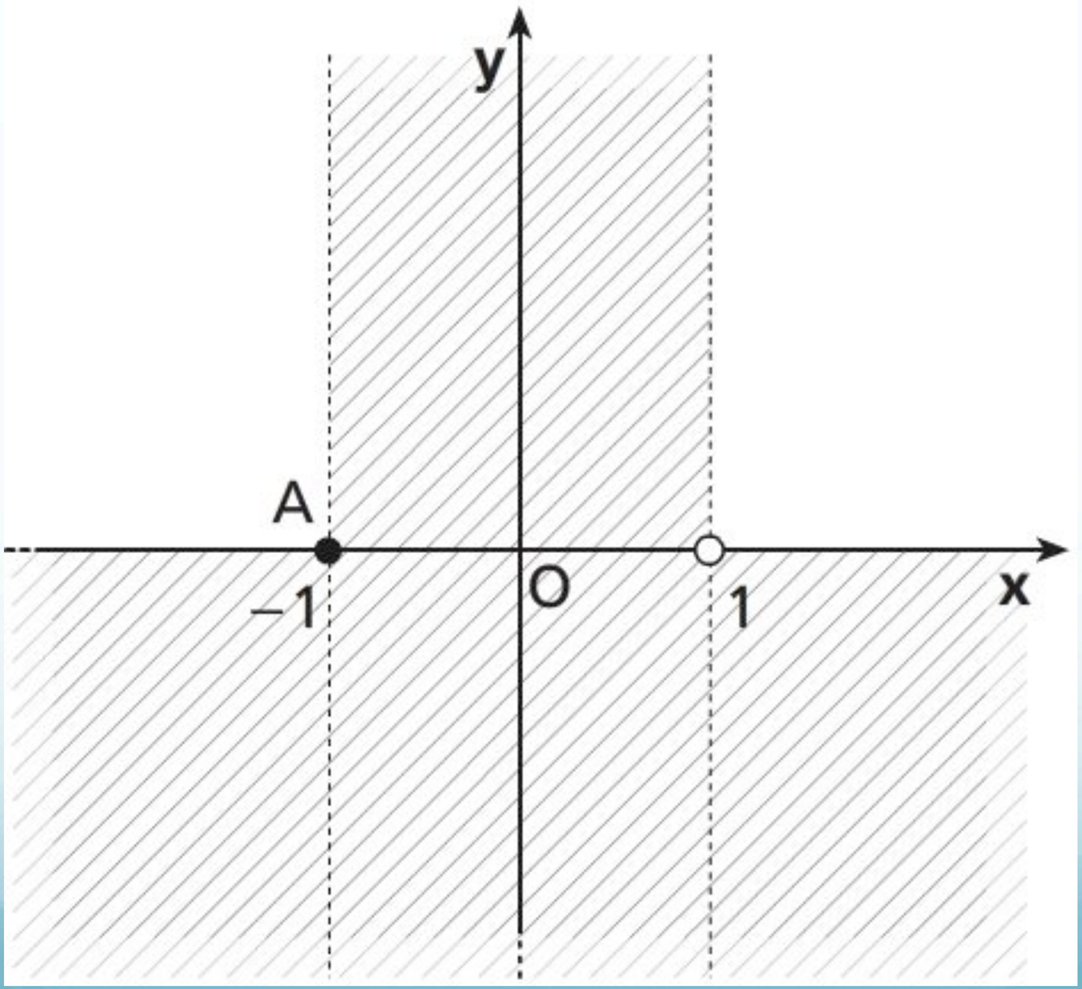
Il punto di intersezione con l'asse x è:

$A(-1; 0)$.

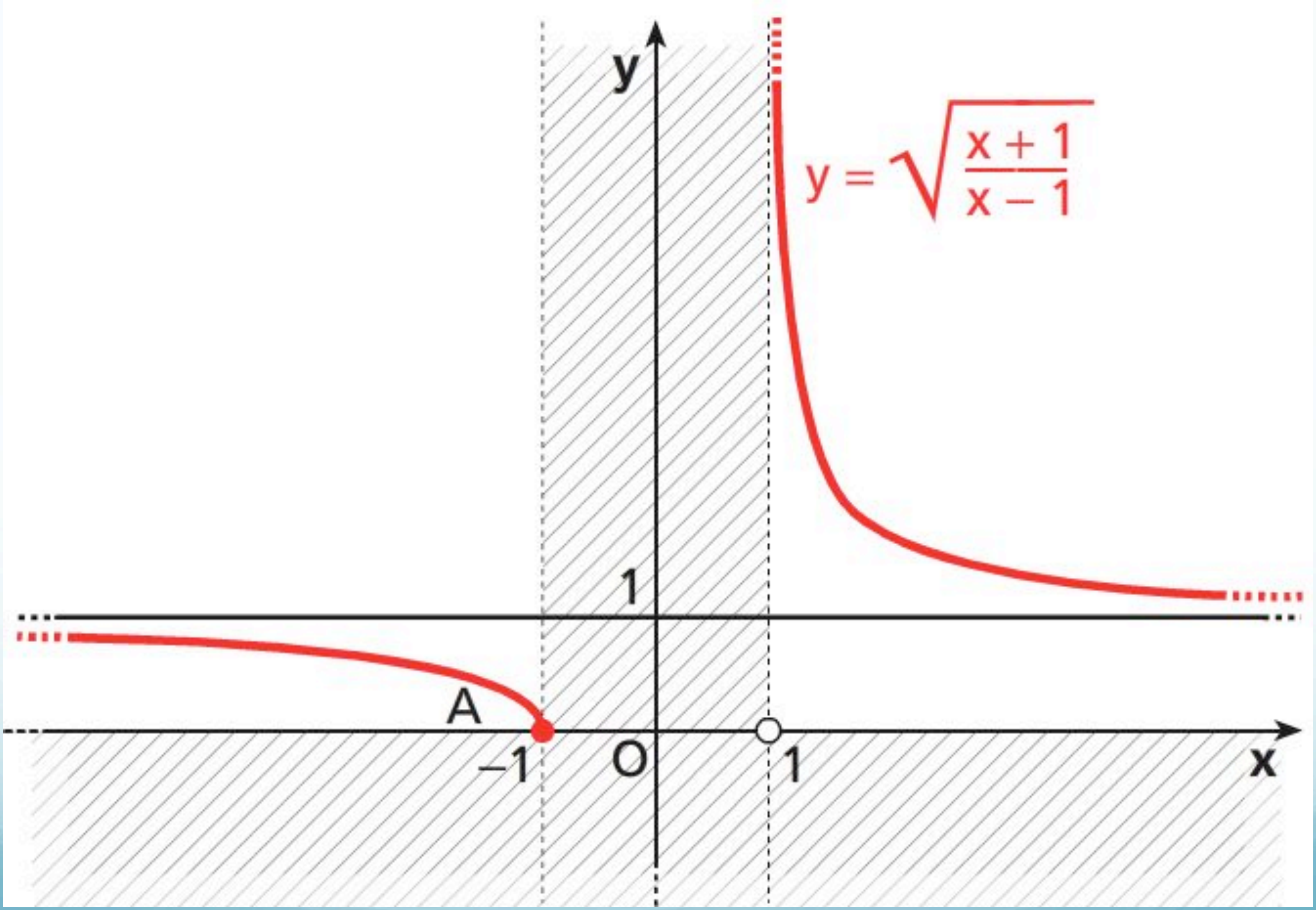
4. Studiamo il segno della funzione.

La funzione è sempre positiva nel suo dominio in quanto un radicale con n pari è sempre positivo o nullo.

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = x^2 \cdot e^x$$

1. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo: $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x}$.

   Poiché $f(-x) \neq \pm f(x)$, la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

   Asse y:

   $\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ il punto di intersezione con l'asse y è $O(0; 0)$.

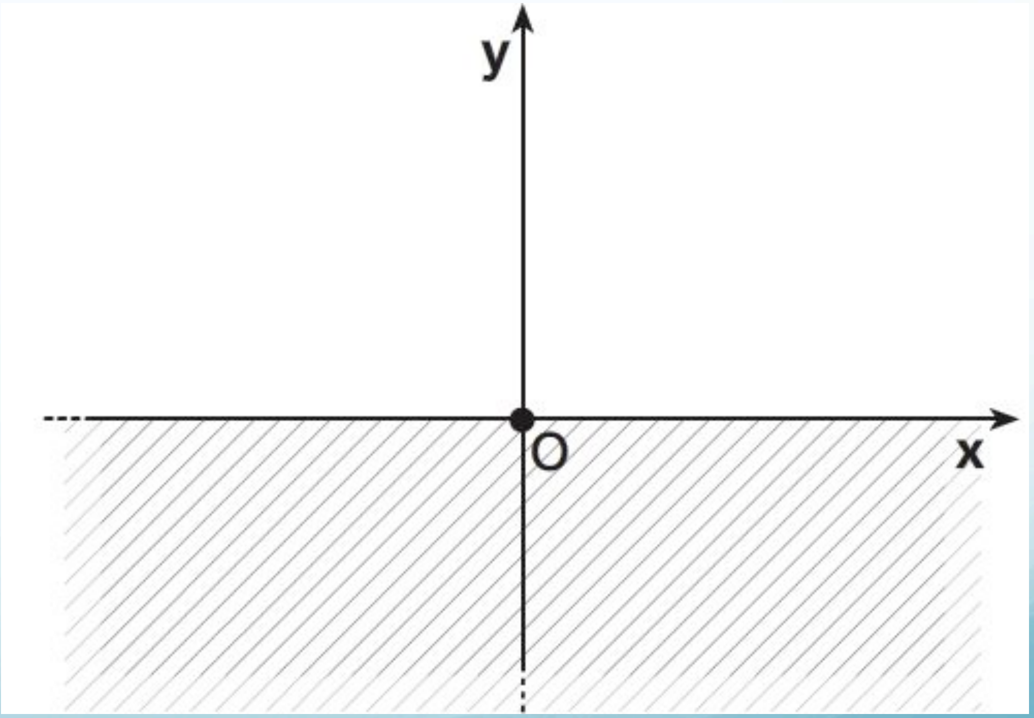
Asse x:

$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot e^x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ il punto di intersezione con l'asse x è $O(0; 0)$.

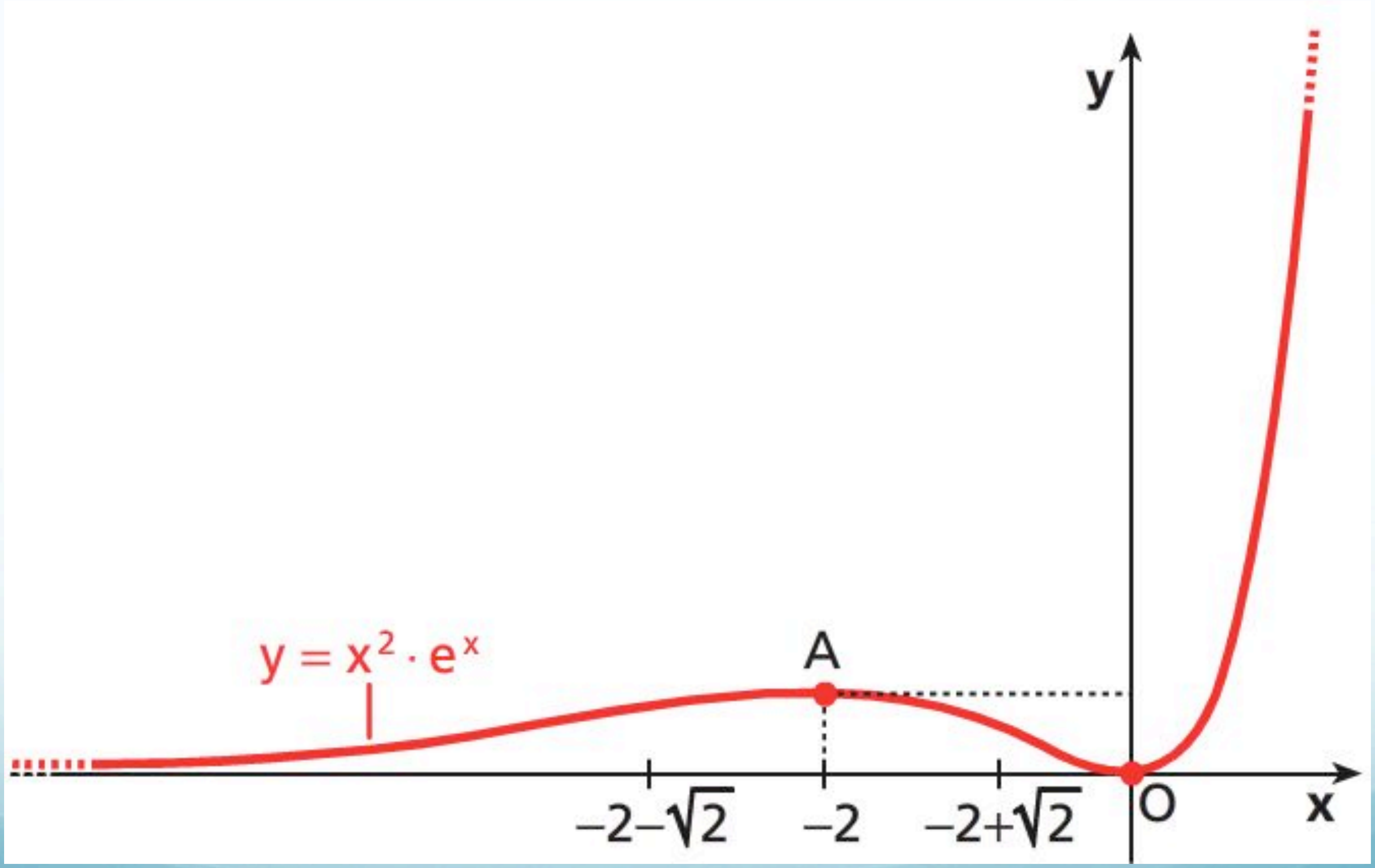
4. Studiamo il segno della funzione:

$$y > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \cdot e^x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = x^2 \cdot \ln x$$

1. Determiniamo il dominio della funzione.
   Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio è:

   $D: x > 0.$

2. La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani in quanto il suo dominio riguarda solo le ascisse positive.

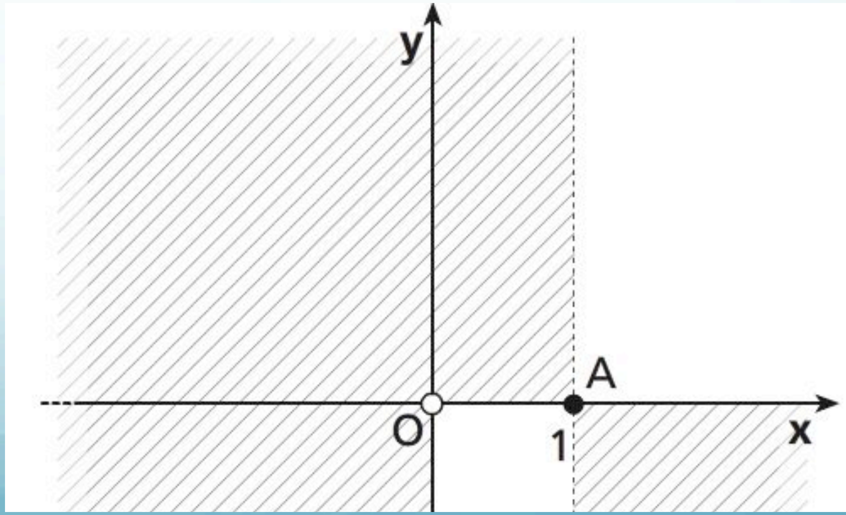
3. Calcoliamo l'intersezione soltanto con l'asse x, perché quella con l'asse y $(x = 0)$ è esclusa dal dominio.
   Asse x:

   $\begin{cases} y = x^2 \cdot \ln x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ il punto di intersezione con l'asse x è $A(1; 0)$.

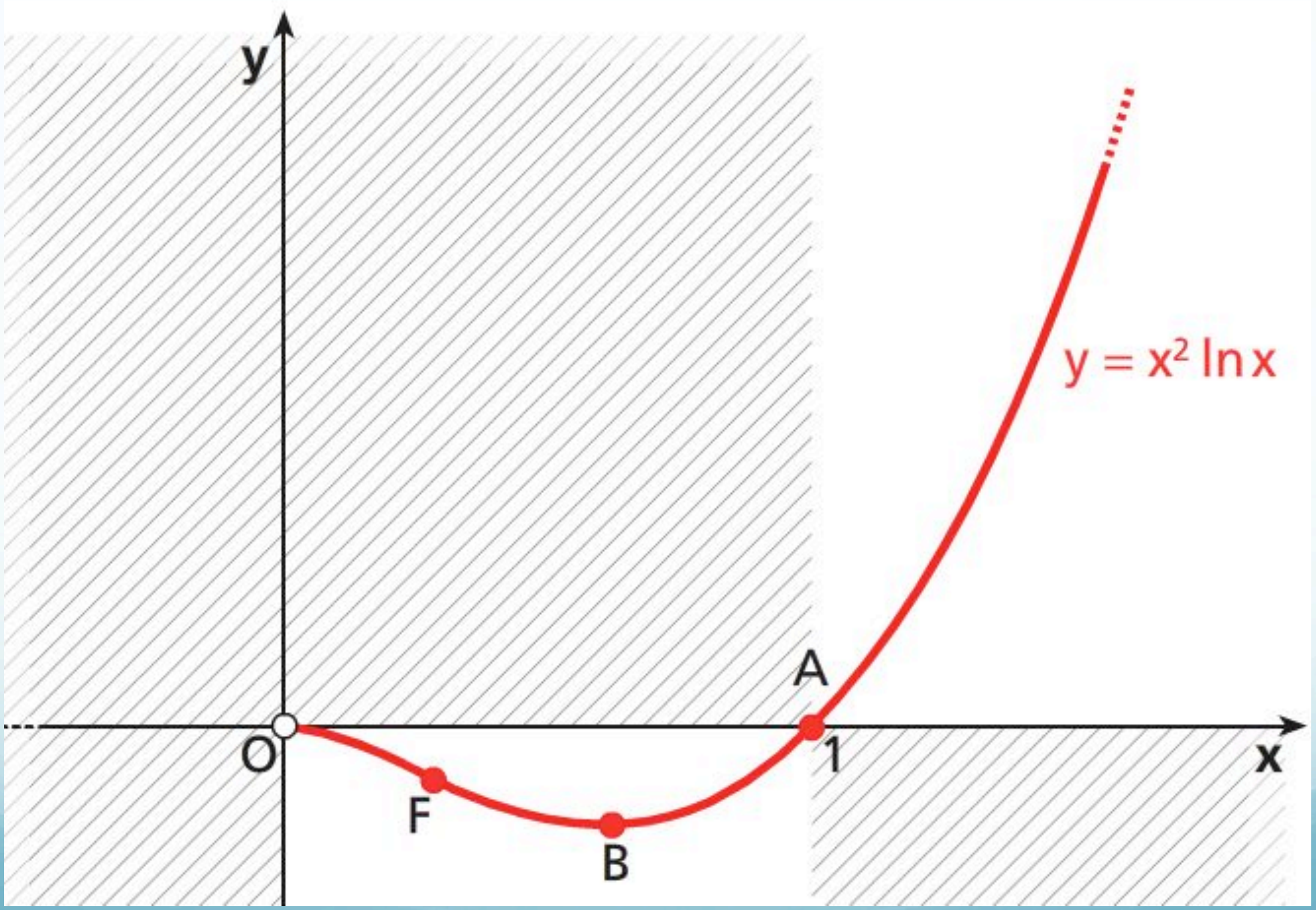
4. Studiamo il segno della funzione:

   $x^2 \cdot \ln x > 0.$

   Primo fattore: $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0.$
   Secondo fattore: $\ln x > 0$ per $x > 1.$
   Si ha $y > 0$ per $x > 1.$



5. Grafico della funzione



$$y = \frac{2\,\text{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1}, \quad \text{nell'intervallo } [0; 2\pi].$$

1. Determiniamo il dominio della funzione nell'intervallo indicato.

La funzione è fratta, quindi dobbiamo porre il denominatore diverso da 0:

$$\cos^2 x - 1 \neq 0 \quad \to \quad \cos x \neq \pm 1 \quad \to \quad D\colon x \neq 0 \ \wedge \ x \neq \pi \ \wedge \ x \neq 2\pi.$$

2. Non studiamo se la funzione è pari o dispari poiché ci limitiamo allo studio nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

3. Cerchiamo soltanto le intersezioni con l'asse delle ascisse perché quella con l'asse delle ordinate $x = 0$ è esclusa dal dominio.

Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\,\text{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}, x = \dfrac{5}{6}\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$A\left(\frac{\pi}{6}; 0\right), \quad B\left(\frac{5}{6}\pi; 0\right).$$

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{2\operatorname{sen}x - 1}{\cos^2 x - 1} > 0;$$

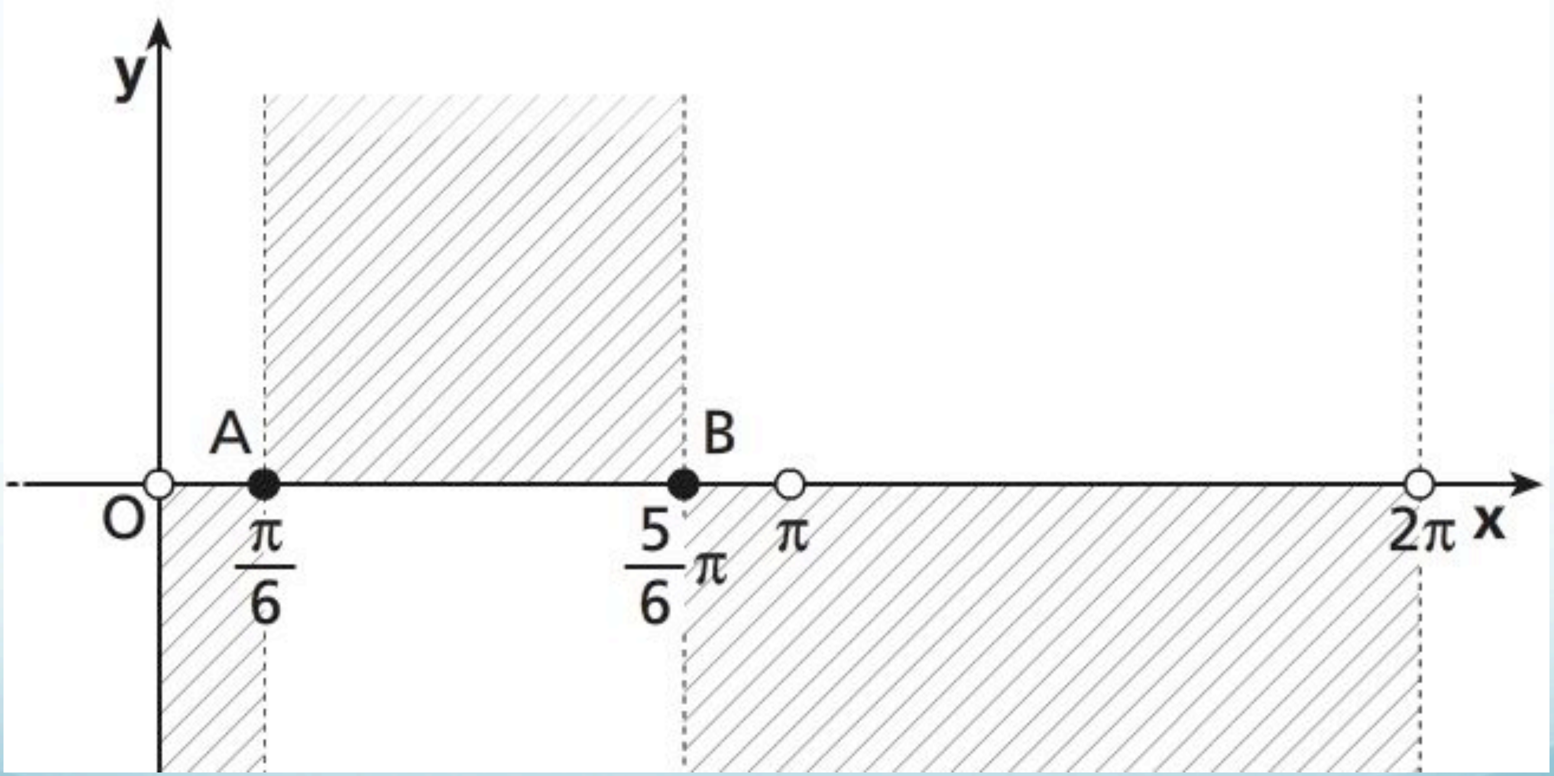
$$N > 0 \quad \rightarrow \quad 2\operatorname{sen}x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi;$$

$$D > 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{nessun valore di } x.$$

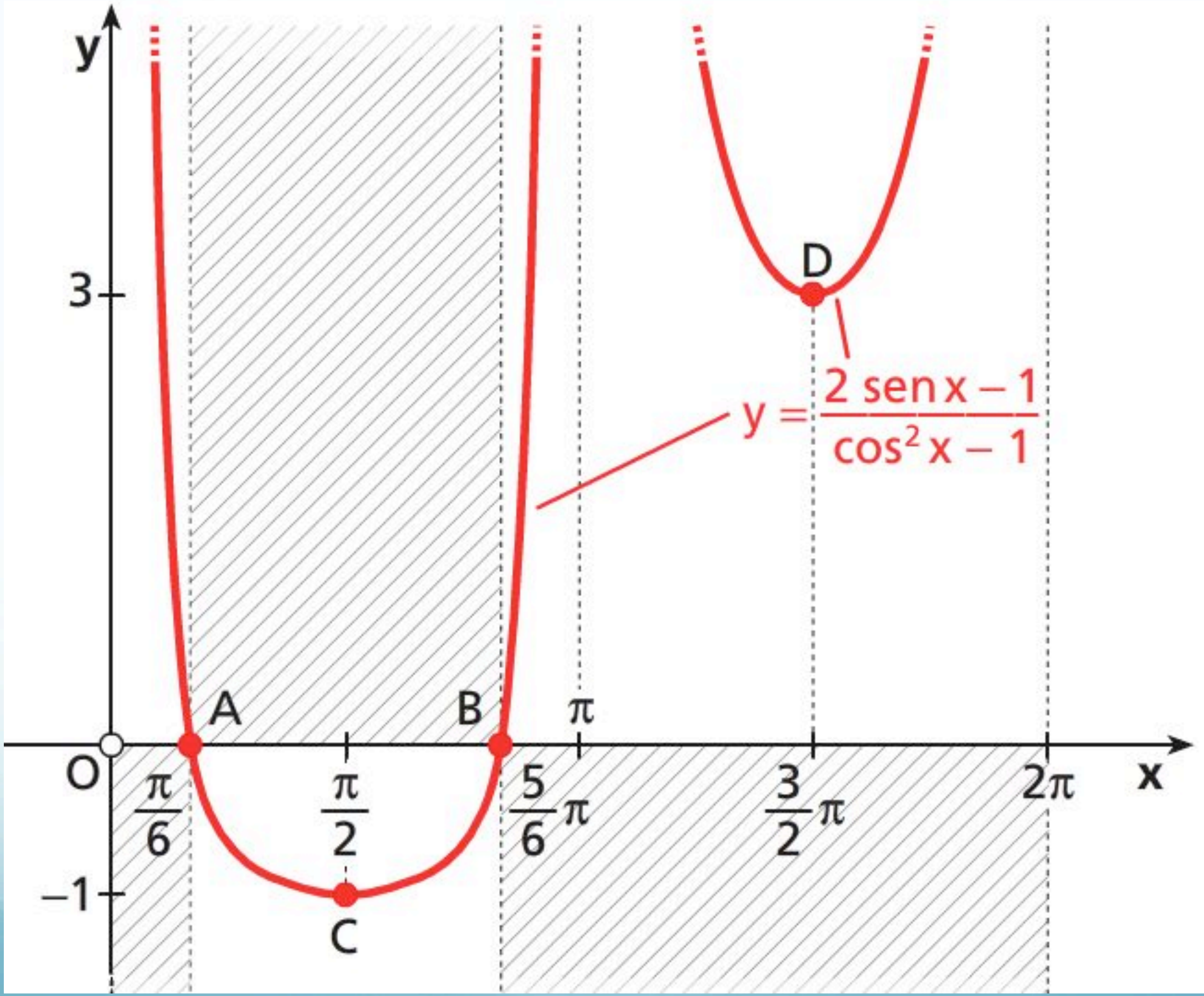
La funzione è positiva quando il numeratore è negativo, ossia per:

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{5}{6}\pi < x < \pi \ \vee \ \pi < x < 2\pi.$$

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



6. Grafico della funzione



$$y = \mathbf{arctg}\,\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

1. Determiniamo il dominio della funzione.

Poiché il denominatore $1 + x^2$ è non nullo per ogni x reale:

$$D: \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = f(x).$$

Poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari.

Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg} 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1-x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

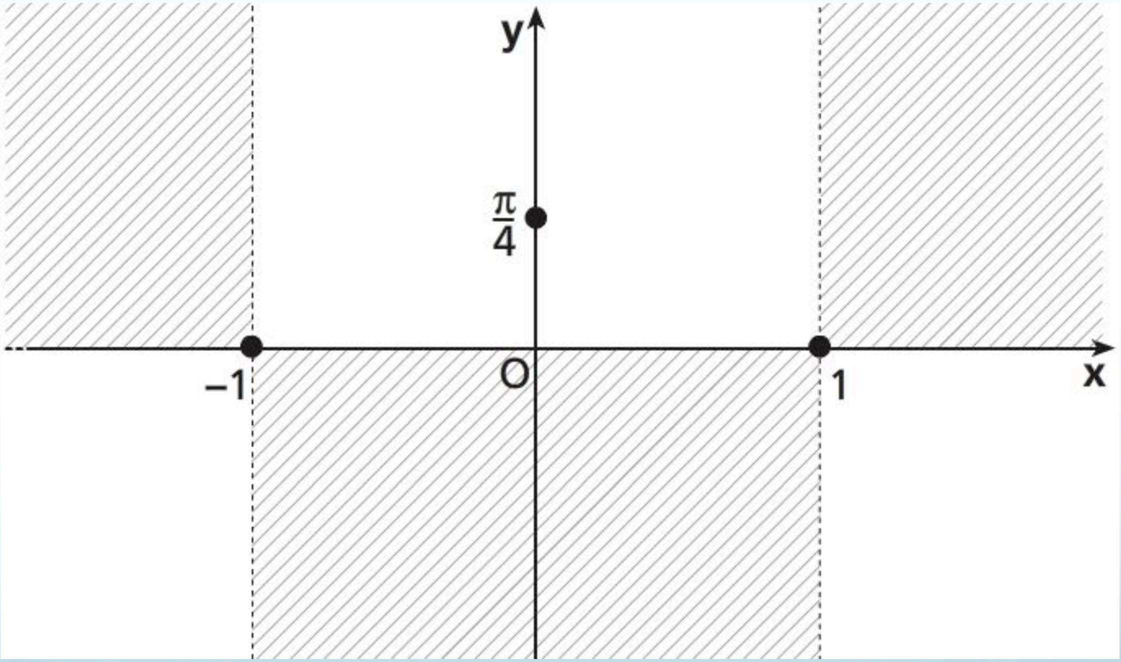
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$; i punti di intersezione con l'asse x sono $B(-1; 0)$ e $C(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2}>0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-x^2}{1+x^2}>0$$

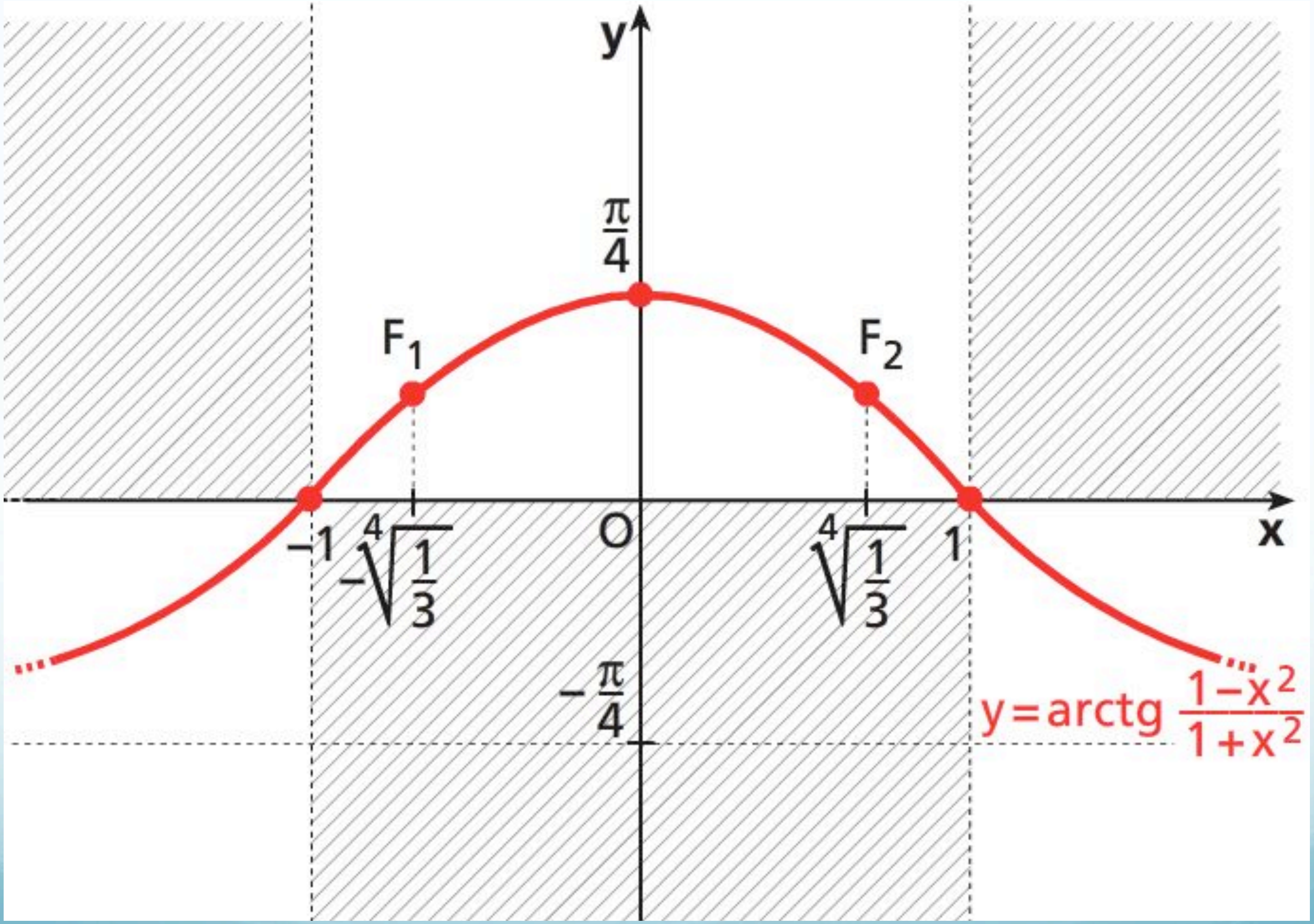
$$1-x^2>0 \quad \text{per} \quad -1<x<1$$

$$1+x^2>0 \quad \text{per} \quad \text{ogni } x.$$



La funzione ha quindi lo stesso segno di $1-x^2$.

6. Grafico della funzione



$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}}$$

1. Dominio

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow C.E.\ \log aritmo \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow C.E.\ frazione \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{DOMINIO} D = R_0^+ - \{1\}$$

2. Simmetrie

La funzione non è pari né dispari, e lo possiamo asserire senza fare i conti perché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, ossia la funzione si trova tutta a destra dell'origine.

3. Segno della funzione

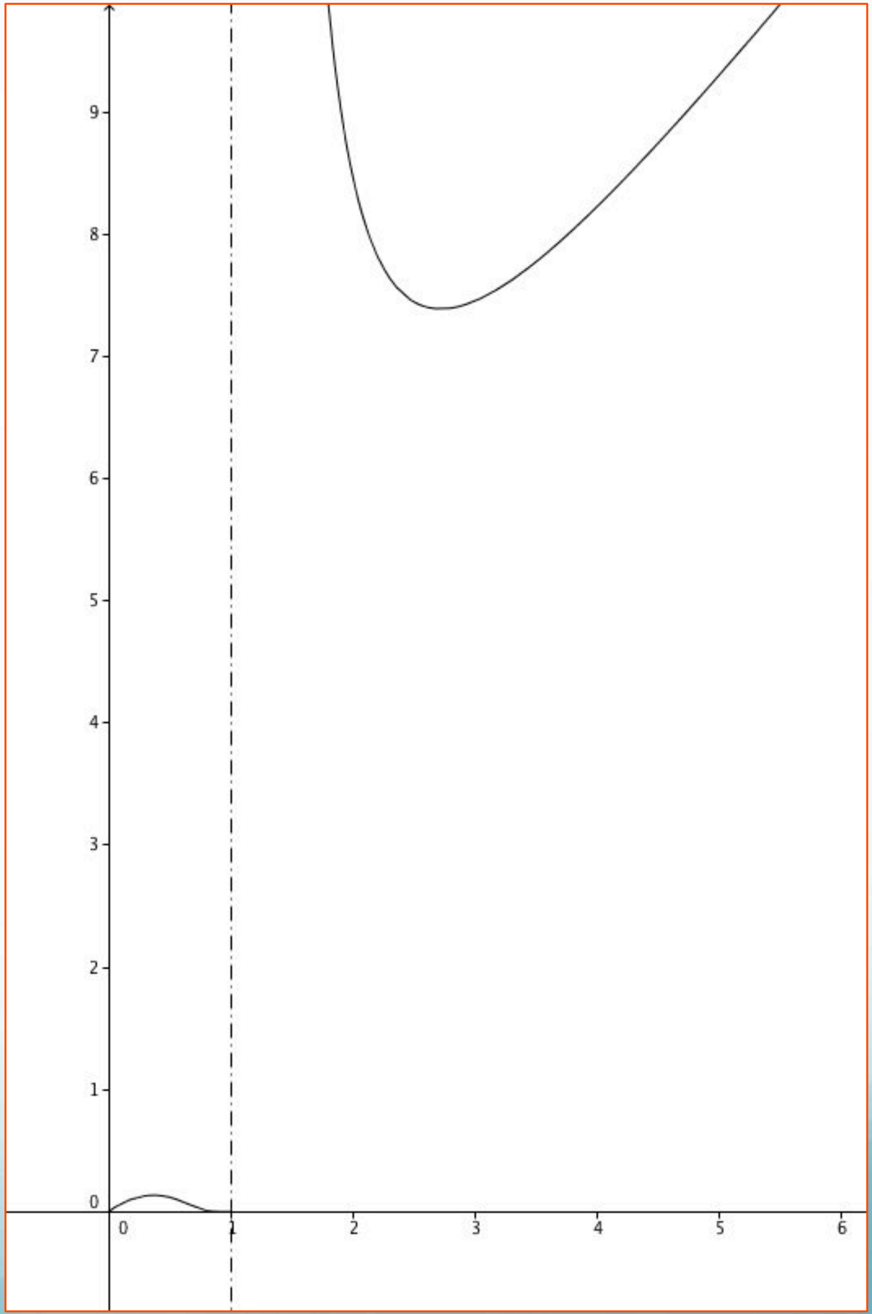
$$f(x) > 0 \Rightarrow x \cdot e^{\frac{1}{\ln x}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ e^{\frac{1}{\ln x}} > 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in D \end{cases}$$

Nel dominio della funzione, sia x che la funzione esponenziale è positiva. La funzione risulta positiva poiché prodotto di funzioni positive.

4. Intersezione assi

Poichè la funzione esiste per x>0 ed è positiva in questo intervallo, non può avere intersezioni con gli assi cartesiani.

5. Grafico



$$f(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln x}$$

1. Dominio

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow C.E. \log aritmo \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow C.E. \; frazione \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

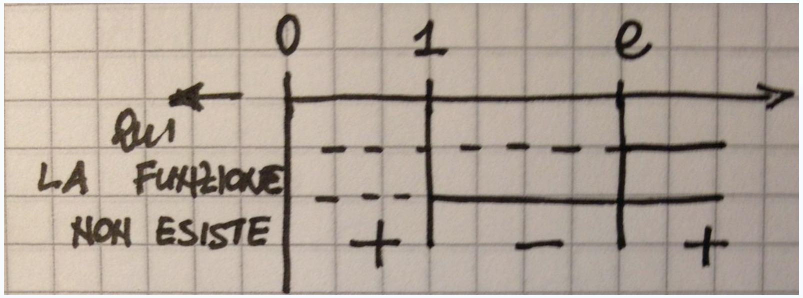
$$\xrightarrow{DOMINIO} D=R_0^+-\{1\}=\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

La funzione non è pari né dispari, e lo possiamo asserire senza fare i conti perché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, ossia la funzione si trova tutta a destra dell'origine.

3. Segno della funzione

$$f(x)>0 \Rightarrow \frac{\ln x-1}{\ln x}>0 \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} \ln x-1>0 \\ \ln x>0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x>e \\ x>1 \end{cases}$$



$$f(x)>0 \quad per \quad \forall x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$$

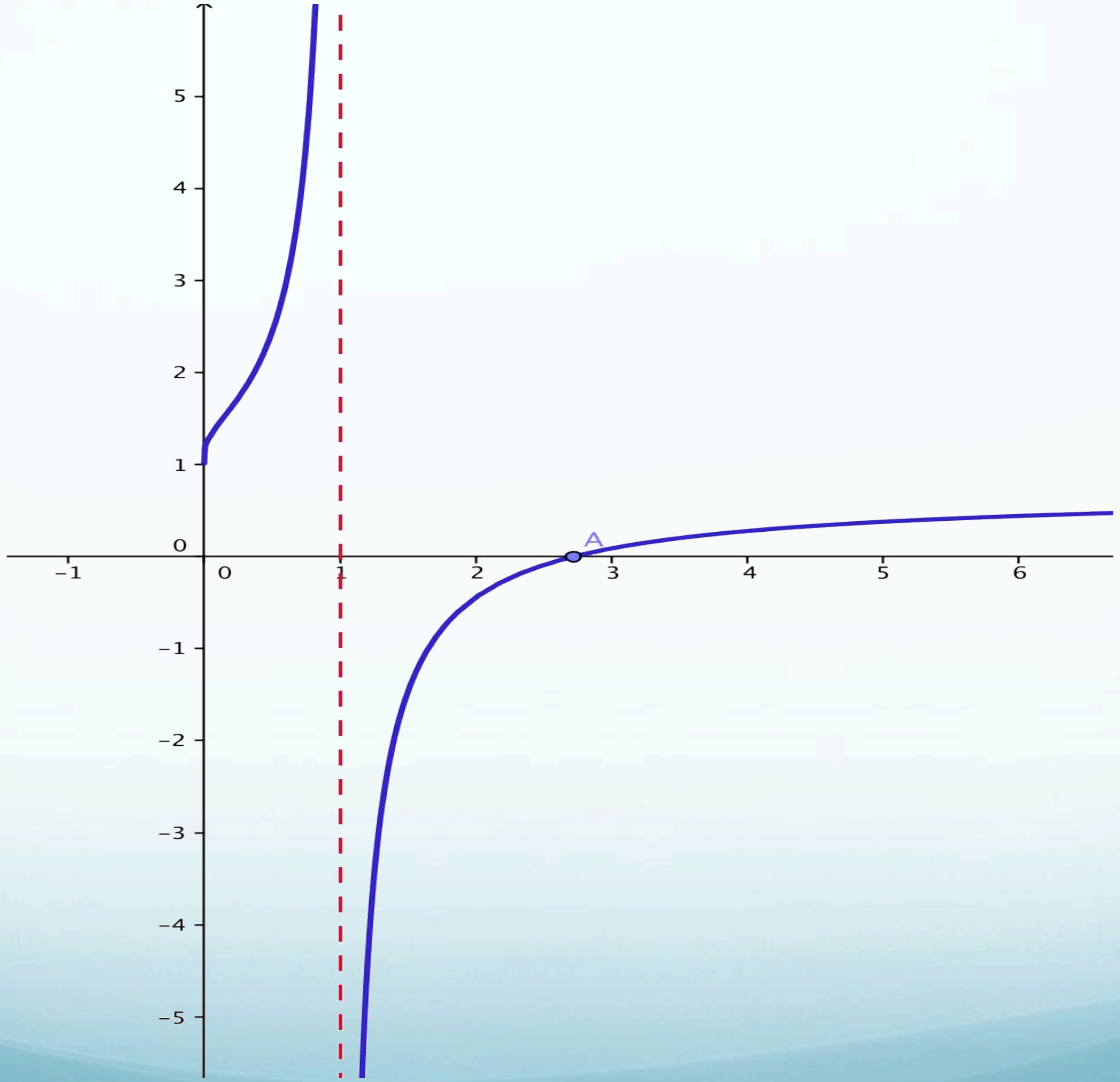
$$f(x)<0 \quad per \quad \forall x \in \left]1;e\right[$$

4. Intersezione assi

$$X:\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{\ln x-1}{\ln x}=0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \begin{cases} y=0 \\ x=e \end{cases} \Rightarrow A=(e;0)$$

$$Y:\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\ln 0-1}{\ln 0} \end{cases} \xrightarrow[non\ \ esiste]{\ln 0} non\ \ ci\ \ sono\ \ \text{int}ersezioni\ \ con\ \ l'asse\ \ y$$

5. Grafico



$$f(x)=\left|x^2-1\right|\cdot e^{2x}$$

1. Dominio

La funzione data ha come dominio l'insieme R in quanto è il prodotto di due funzioni che hanno come dominio R:

$$\begin{cases} \left|x^2-1\right| \xrightarrow{dominio} R \\ e^{2x} \xrightarrow{dominio} R \end{cases} \xrightarrow{DOMINIO} D=R=\left]-\infty;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x)=\left|x^2-1\right|e^{-2x}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

3. Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \left|x^2 - 1\right| \cdot e^{2x} > 0 \xrightarrow{\textit{soluzione}} \begin{cases} \left|x^2 - 1\right| > 0 \\ e^{2x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in R \\ \forall x \in R \end{cases}$$

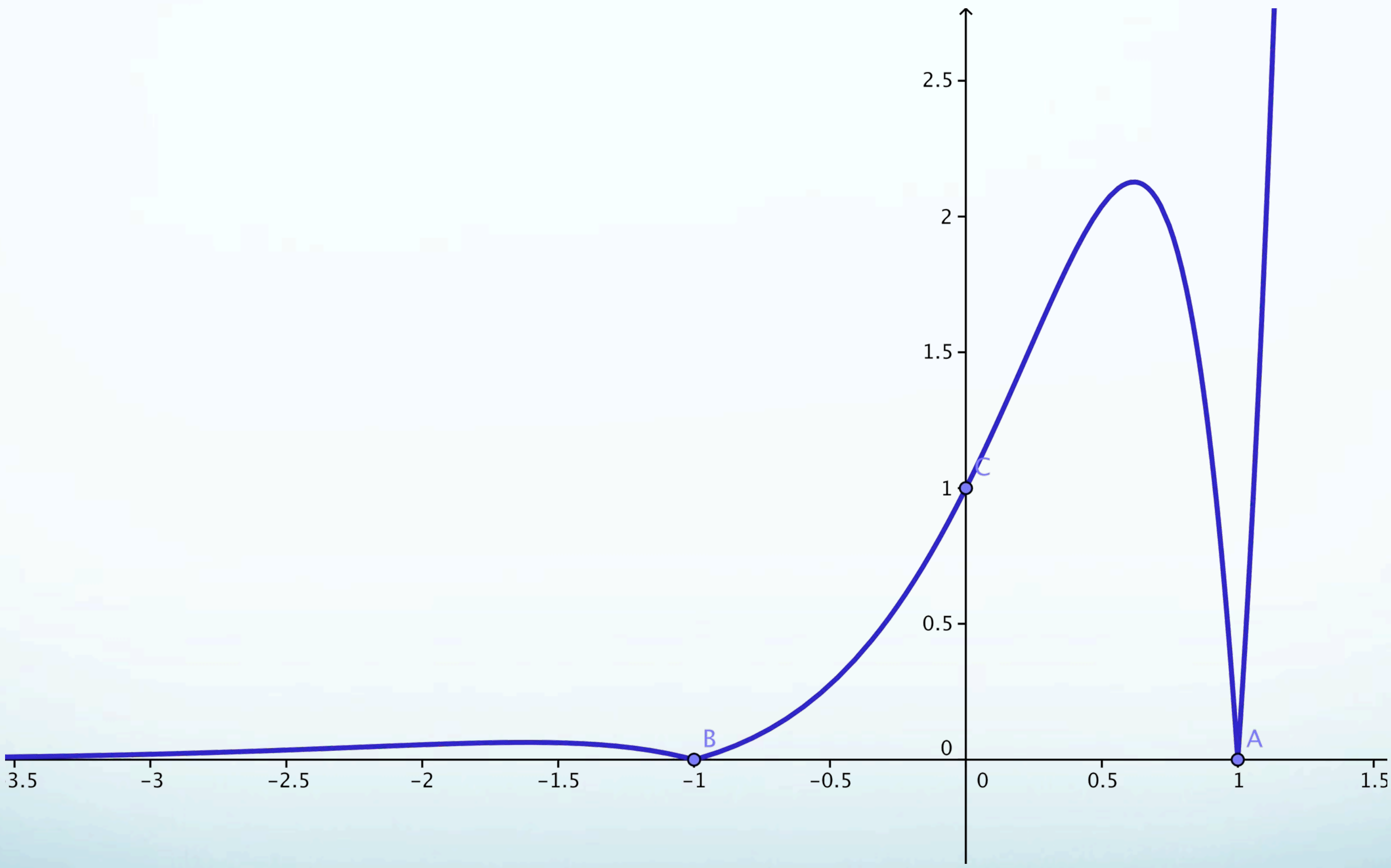
La funzione è sempre positiva nel suo dominio (tranne quando si annulla) perché data dal prodotto di due funzioni sempre positive (o al più nulle - la prima -).

4. Intersezione assi

$$X : \begin{cases} y = 0 \\ \left|x^2 - 1\right| = 0 \end{cases} \xrightarrow{\textit{solzione}} \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow A = (1;0) \quad B = (-1;0)$$

$$Y : \begin{cases} x = 0 \\ y = \left|-1\right| \cdot e^{0} = 1 \end{cases} \xrightarrow{\textit{soluzione}} C = (0;1)$$

5. Grafico



$$f(x)=e^{\frac{2}{x-1}}$$

1. Dominio

L'unica condizione da porre è sulla frazione, in quanto la funzione esponenziale ha come dominio R:

$$x-1\neq 0 \rightarrow C.E.\ frazione \xrightarrow{DOMINIO} \forall x\neq 1 \rightarrow D=\left]-\infty;1\right[\ \cup\ \left]1;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x)=e^{\frac{2}{-x-1}}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

3. Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow e^{\frac{2}{x-1}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \in D$$

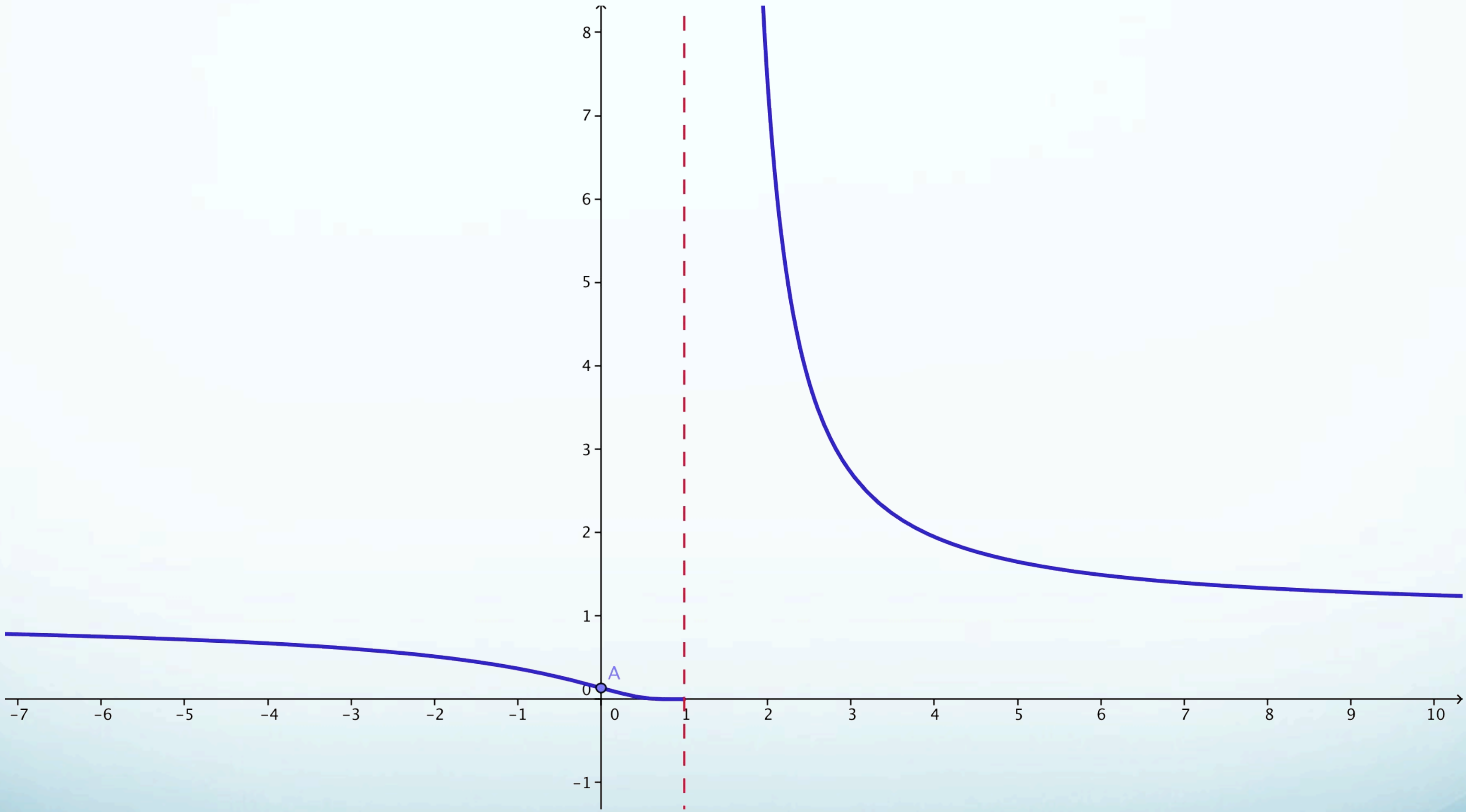
Non c'è bisogno di fare nessun calcolo in quanto la funzione in esame, essendo una funzione esponenziale, è sempre positiva nel suo dominio.

4. Intersezione assi

$$X: \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{2}{x-1}} = 0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \nexists \text{ int} \, ersezioni$$

$$Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{2}{0-1}} = e^{-2} \end{cases} \xrightarrow{soluzione} A = (0; e^{-2})$$

5. Grafico



$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

1. Dominio

$$\frac{x^2}{x-1} > 0 \rightarrow C.E.\log aritmo \xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \xrightarrow{soluzione} x \neq 0 \vee x > -1$$

$$D = \left]-1;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = \ln\left(\frac{x^2}{-x+1}\right) \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

3. Intersezione assi

$$X:\begin{cases} y=0 \\ \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=0 \end{cases} \xrightarrow{solzione} \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2-x-1}{x+1}=0 \end{cases}$$

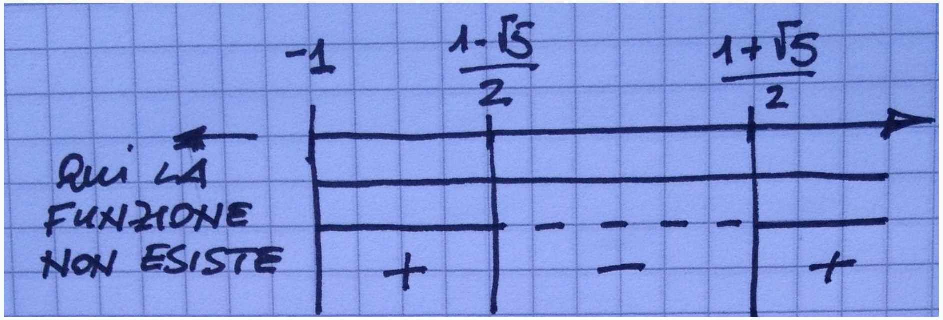
$$\xrightarrow{soluzione} A=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right) \quad B=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$$

$$Y:\begin{cases} x=0 \\ y=\ln\left(\dfrac{0}{0+1}\right) \end{cases} \xrightarrow[non\ \ esiste]{\ln 0} \nexists\ \text{int}\,ersezioni$$

4. Segno della funzione

$$f(x)>0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)>0 \xrightarrow[\log aritmo]{definizione} \frac{x^2}{x+1}>1 \to \frac{x^2-x-1}{x+1}>0$$

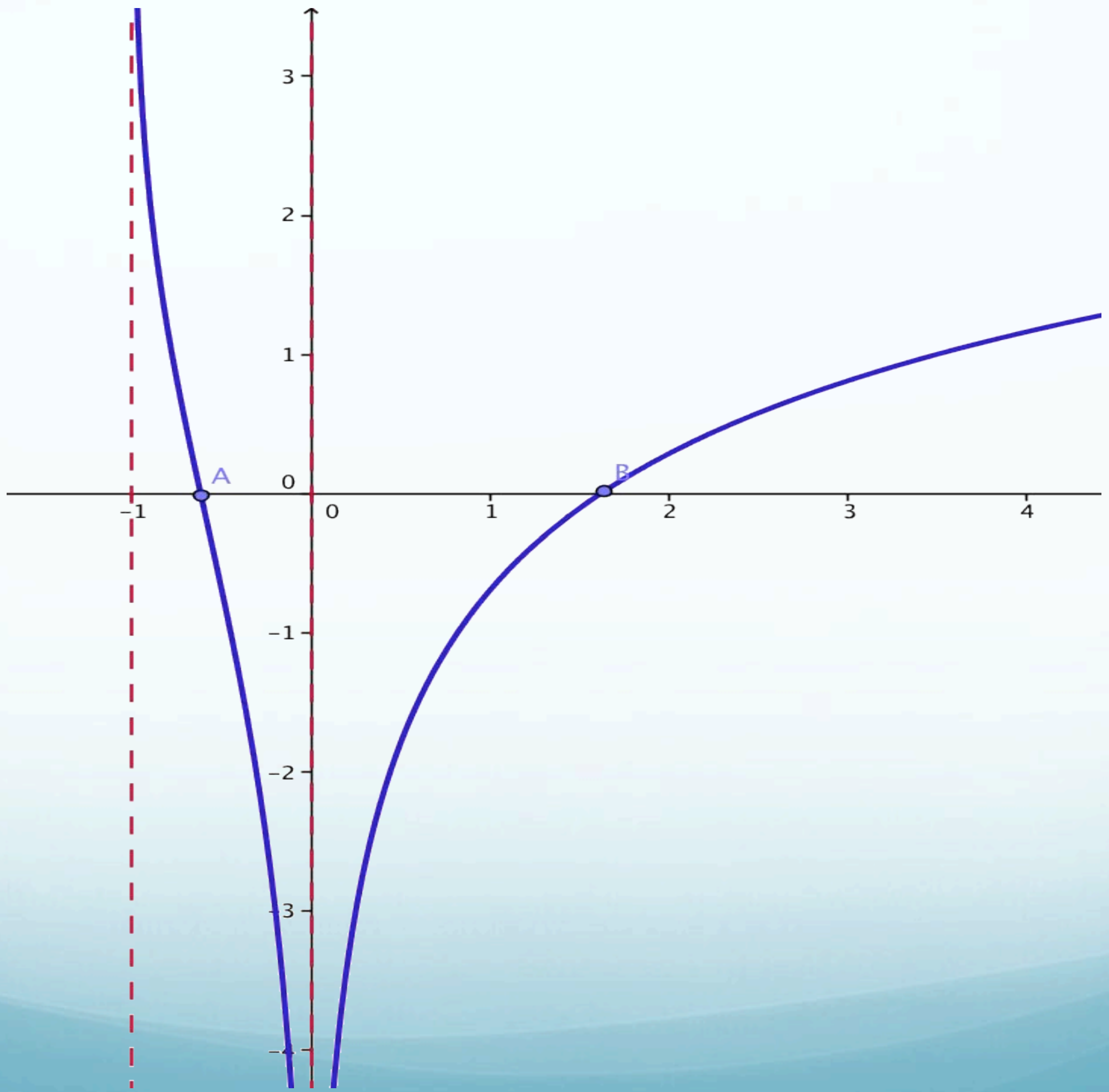
$$\xrightarrow{soluzione} \begin{cases} x^2-x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \to \begin{cases} x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x>-1 \end{cases}$$



$$f(x)>0 \ \ per \ \ \forall x \in \left]-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$$

$$f(x)<0 \ \ per \ \ \forall x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

5. Grafico



$$f(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

1. Dominio

$$x \neq 0 \rightarrow C.E.\ frazione \xrightarrow{dominio} D =]-\infty;0[\ \cup \ ]0;+\infty[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = (-x-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è pari né dispari, quindi non presenta simmetrie.

4. Intersezione assi

$$X:\begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0 \end{cases} \xrightarrow[\textit{sempre}\neq 0]{\substack{\textit{soluzione} \\ \textit{funzione esponenziale}}} \begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \xrightarrow{\textit{soluzione}} A=(2;0)$$

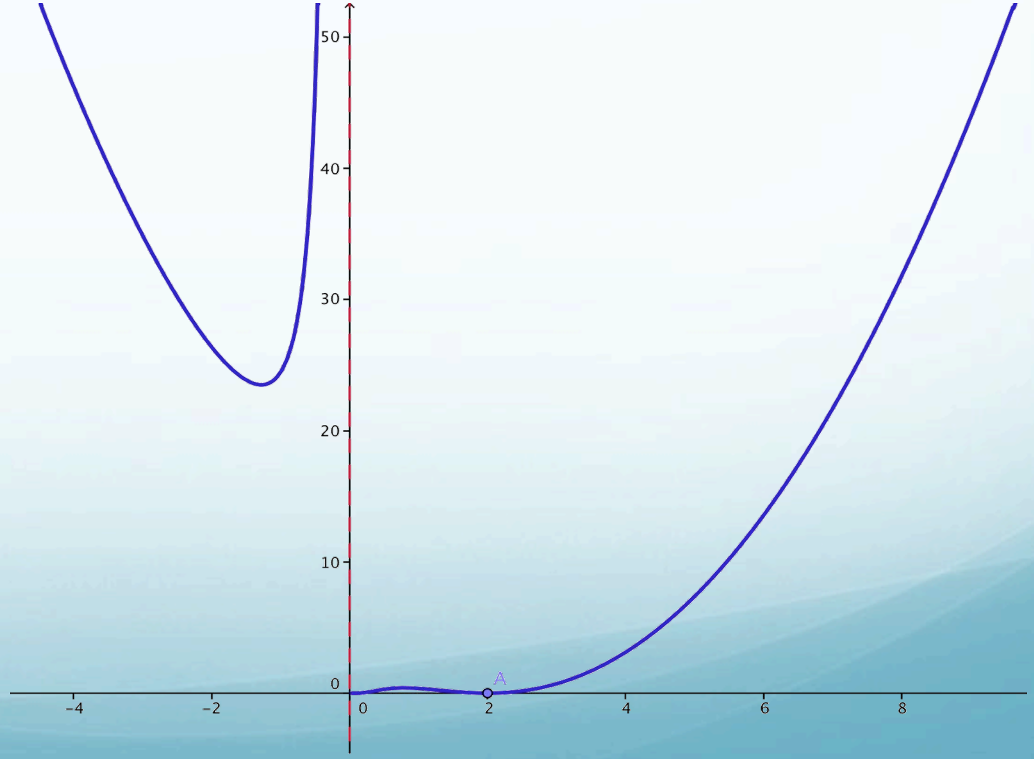
Non ci sono intersezioni con l'asse y in quanto in x=0 la funzione non esiste.

4. Segno della funzione

$$f(x)>0 \Rightarrow (x-2)^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \left[\begin{array}{l} (x-2)^2 > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \in D - \{2\} \\ e^{-\frac{1}{x}} > 0 \xrightarrow{soluzione} \forall x \in D \end{array} \right.$$

La funzione è sempre positiva nel suo dominio, tranne in x=2 dove si annulla.

5. Grafico



$$y = \left| \frac{1-3x}{x^2-1} \right|$$

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica fratta in valore assoluto

2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \left| \frac{1+3x}{x^2-1} \right| \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

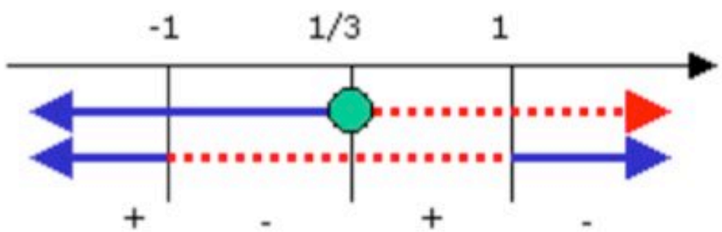
$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D = \Re - \{\pm 1\}$$

A questo punto conviene esprimere la funzione valore assoluto come:

$$y = \left|\frac{1-3x}{x^2-1}\right| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1-3x}{x^2-1} \rightarrow \text{se} \dfrac{1-3x}{x^2-1} \geq 0 \Rightarrow x < -1 \cup \dfrac{1}{3} \leq x < 1 \\ y_2 = -\dfrac{1-3x}{x^2-1} \rightarrow \text{se} \dfrac{1-3x}{x^2-1} < 0 \Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{3} \cup x > 1 \end{cases}$$

$$N \rightarrow 1-3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$D \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \cup x > 1$$



Non confondere questo grafico con il segno della funzione, in quanto la funzione valore assoluto, per definizione, è sempre positiva. Questo grafico ci dice dove si trovano le funzioni y_1 e y_2, la cui unione dà luogo alla funzione valore assoluto.

4. Intersezione con gli assi cartesiani:

$$X:\begin{cases} y_1 = \dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 1-3x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow A=\left(\frac{1}{3};0\right) \qquad Y:\begin{cases} y_1 = \dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \nexists y \in \Re$$

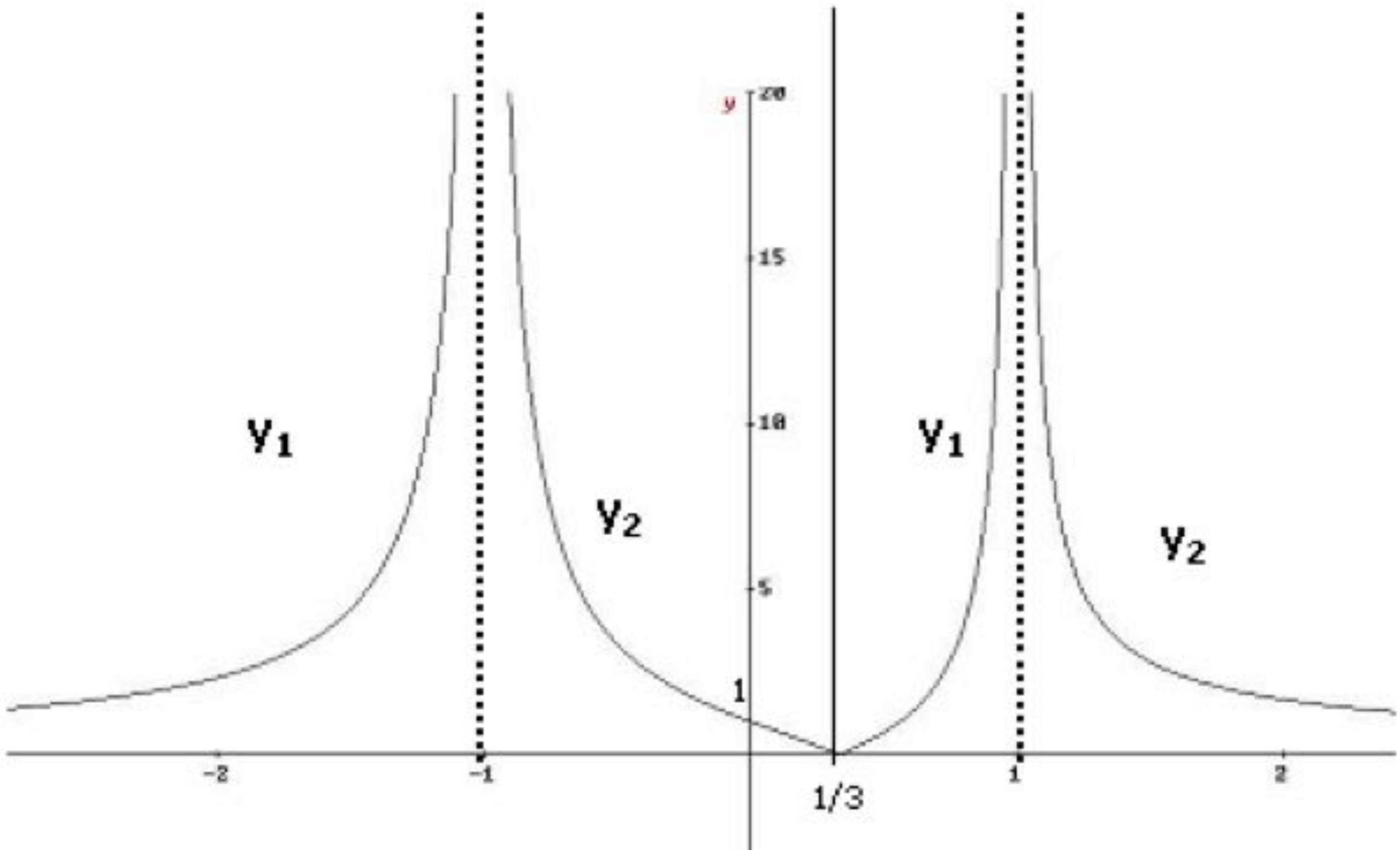
La funzione y_1 non interseca l'asse delle y in quanto il valore trovato y = -1 è negativo e la funzione valore assoluto è sempre positiva.

$$X:\begin{cases} y_2 = -\dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -1+3x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow A=\left(\frac{1}{3};0\right) \qquad Y:\begin{cases} y_2 = -\dfrac{1-3x}{x^2-1} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow B=(0;1)$$

5. Segno:

La funzione valore assoluto è sempre positiva.

5. Grafico della funzione:



$$y = \left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \right|$$

1. **Tipo di funzione**: funzione algebrica fratta in valore assoluto

2. **Simmetrie:**

$$f(-x) = \left| \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1} \right| \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. **Dominio**:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \nexists x \in \Re$$

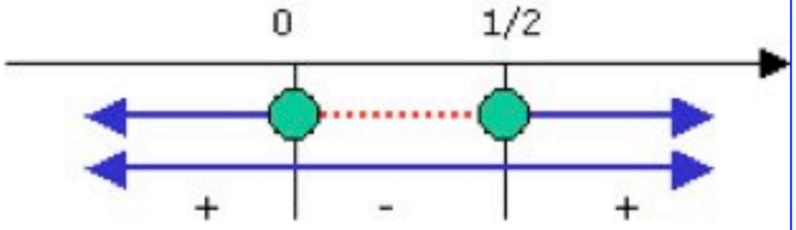
Poiché il denominatore non si annulla mai, in quanto è diverso da zero per qualunque valore della x, non ci sono punti di discontinuità e quindi asintoti verticali.

A questo punto conviene esprimere la funzione valore assoluto come:

$$y=\left|\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right| \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{2x^2-x}{x^2+1} \rightarrow \text{se } \dfrac{2x^2-x}{x^2+1} \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq \dfrac{1}{2} \\ y_2=-\dfrac{2x^2-x}{x^2+1} \rightarrow \text{se } \dfrac{2x^2-x}{x^2+1} < 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$N \rightarrow 2x^2-x \geq \Rightarrow x(2x-1) \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \cup x \geq \frac{1}{2}$$

$$D \rightarrow x^2+1>0 \Rightarrow \forall x \in \Re$$



Non confondere questo grafico con il segno della funzione, in quanto la funzione valore assoluto, per definizione, è sempre positiva. Questo grafico ci dice dove si trovano le funzioni y_1 e y_2, la cui unione dà luogo alla funzione valore assoluto.

4. Intersezione con gli assi cartesiani:

$$X:\begin{cases} y_1 = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = (0;0); B = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

$$X:\begin{cases} y_2 = -\dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = (0;0); B = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

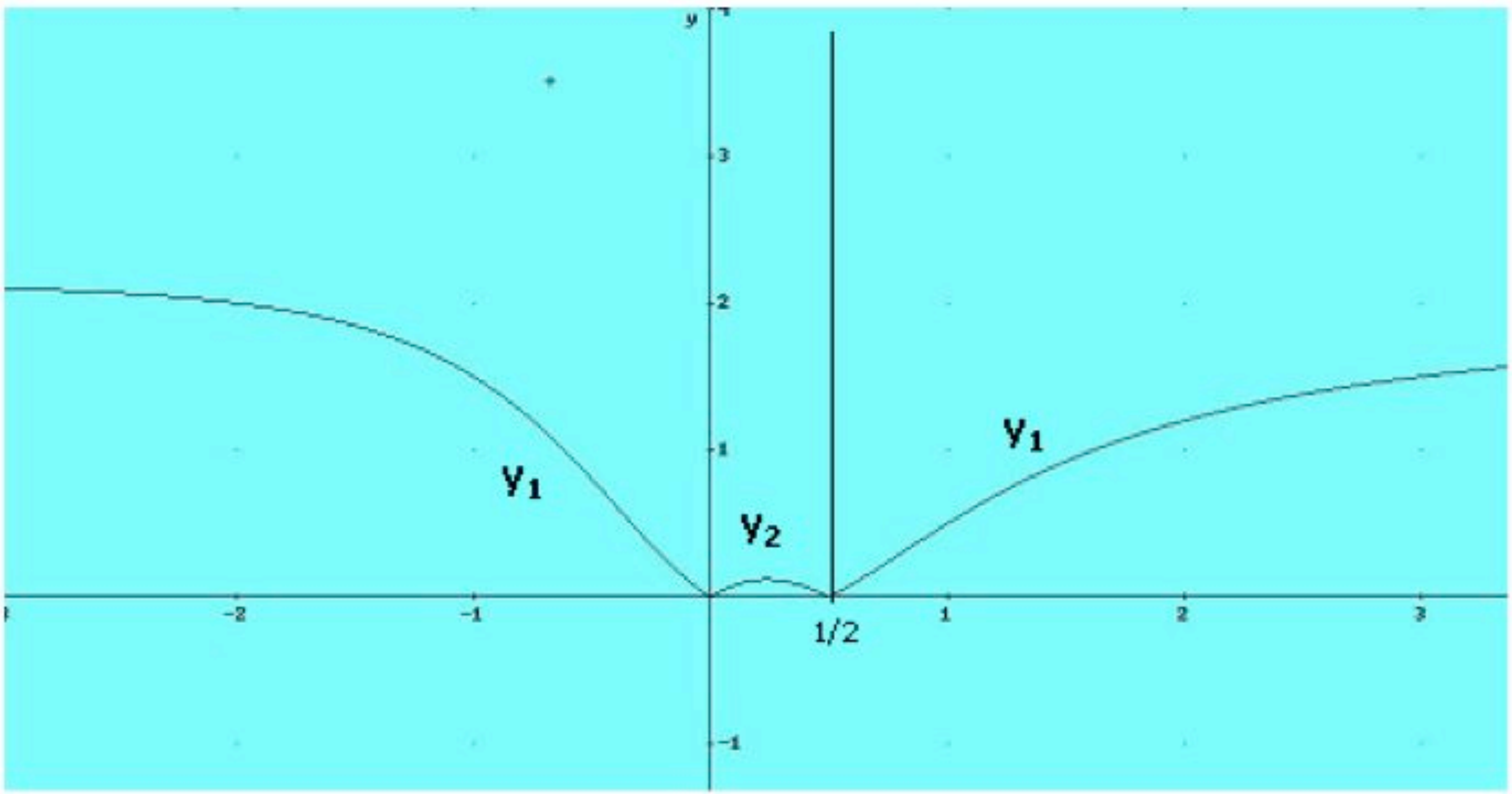
$$Y:\begin{cases} y_1 = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = (0;0)$$

$$Y:\begin{cases} y_2 = -\dfrac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = (0;0)$$

5. Segno:

La funzione valore assoluto è sempre positiva.

6. Grafico della funzione:



$$y = \frac{x^2 - 1}{|x - 2| + 3x}$$

Scriviamo la funzione come:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{4x - 2} & \text{se } x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 1}{2x + 2} & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{4x - 2} & \text{se } x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{x - 1}{2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Studiamo $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4x - 2}$ ed evidenziamo poi, nel grafico, l'arco che si ottiene per $x \geq 2$.

1. Determiniamo il dominio di $y = \dfrac{x^2 - 1}{4x - 2}$. Il denominatore deve essere non nullo, quindi:

D: $x \neq \dfrac{1}{2}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f_1(-x) = \frac{x^2-1}{-4x-2} \neq \pm f_1(x) \quad \rightarrow \text{ la funzione non è né pari né dispari.}$$

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

$$\text{Asse } y\text{: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Asse } x\text{: } \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2-1}{4x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

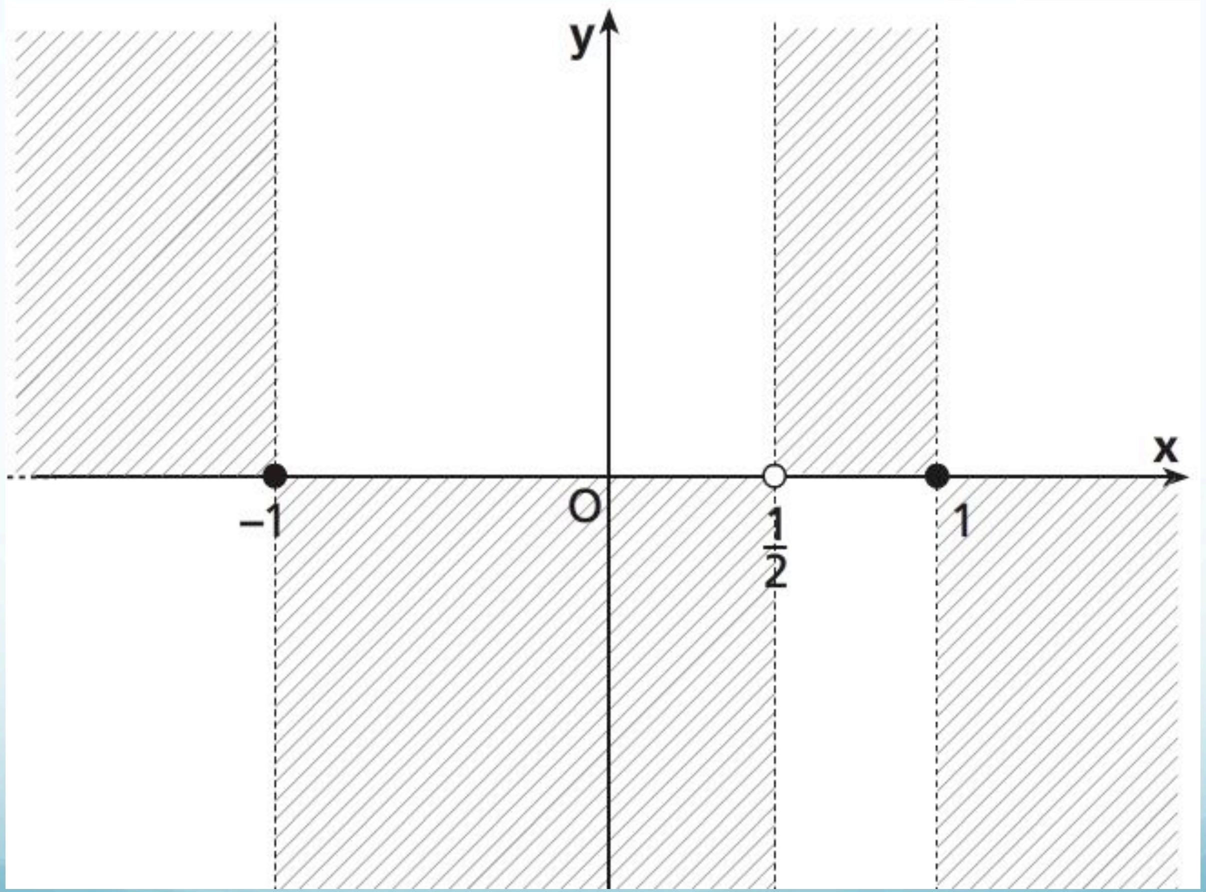
I punti di intersezione sono $A\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{x^2-1}{4x-2} > 0 < \begin{matrix} x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1 \\ 4x - 2 > 0 \text{ per } x > \dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$x^2 - 1$	+	0	−		−	0	+
$4x - 2$	−		−	0	+		+
y	−	0	+	$\nexists$	−	0	+

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.

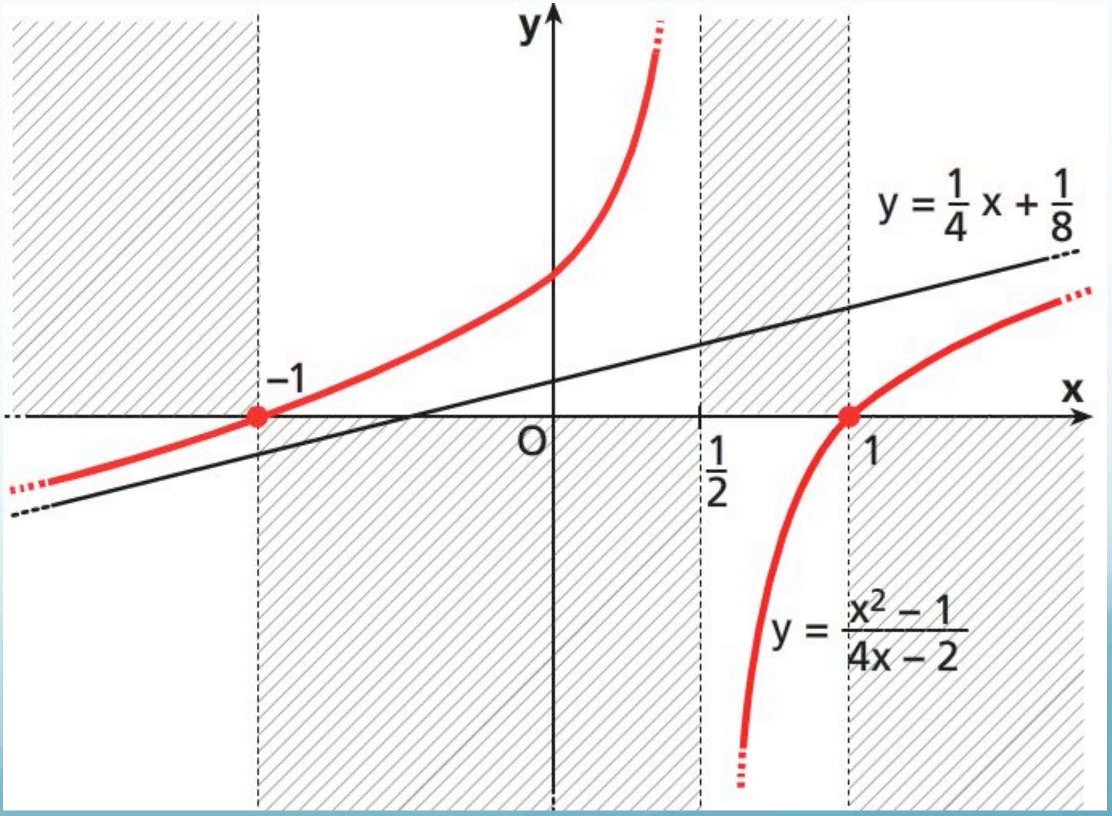


L'asintoto obliquo ha equazione:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}.$$

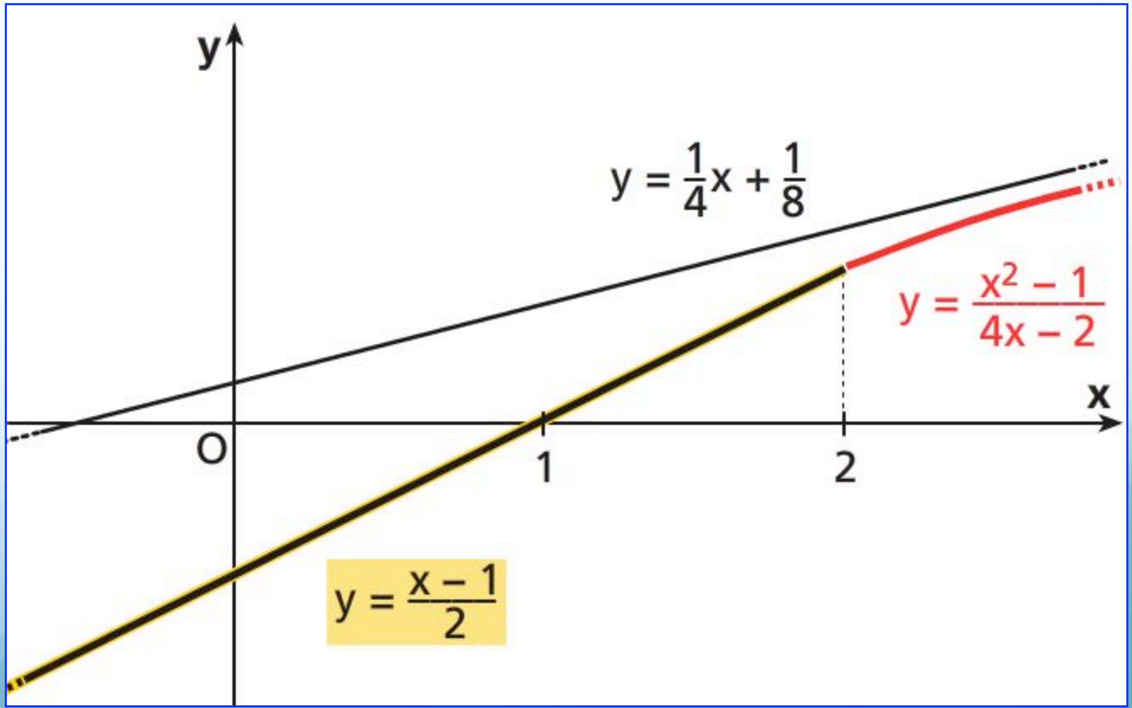
- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \mp\infty \quad \to \quad x = \frac{1}{2}$ è un asintoto verticale.

6. Grafico della funzione



Tracciamo il grafico completo della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-2| + 3x}$, considerando il grafico della figura *c* per $x \geq 2$ e disegnando il grafico della retta $y = \dfrac{x-1}{2}$ per $x < 2 \wedge x \neq -1$ (figura *d*).

Quindi, la retta è privata del punto $(-1; -1)$.



$$y = 2senx - sen2x \qquad in\ [0;2\pi]$$

1) DOMINIO: $\mathbb{D} = [0;2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0) \in f(x)$

$f(x) = 0 \rightarrow 2senx - 2senx\cos x = 0 \qquad 2senx(1-\cos x) = 0$

$2senx = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \rightarrow (\pi, 0) \in f(x)$

$\cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases} \qquad (2\pi, 0) \in f(x)$

3. Simmetrie

$$f(-x) = 2\sin(-x) - sen(-2x) = -2\sin x + sen 2x = -f(x)$$

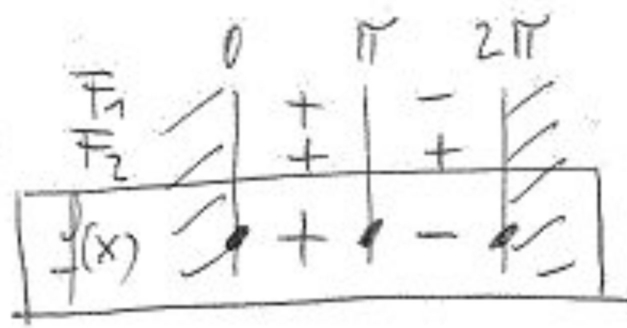
La funzione è dispari (oltre a essere periodica), quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi.

3) SEGNO :

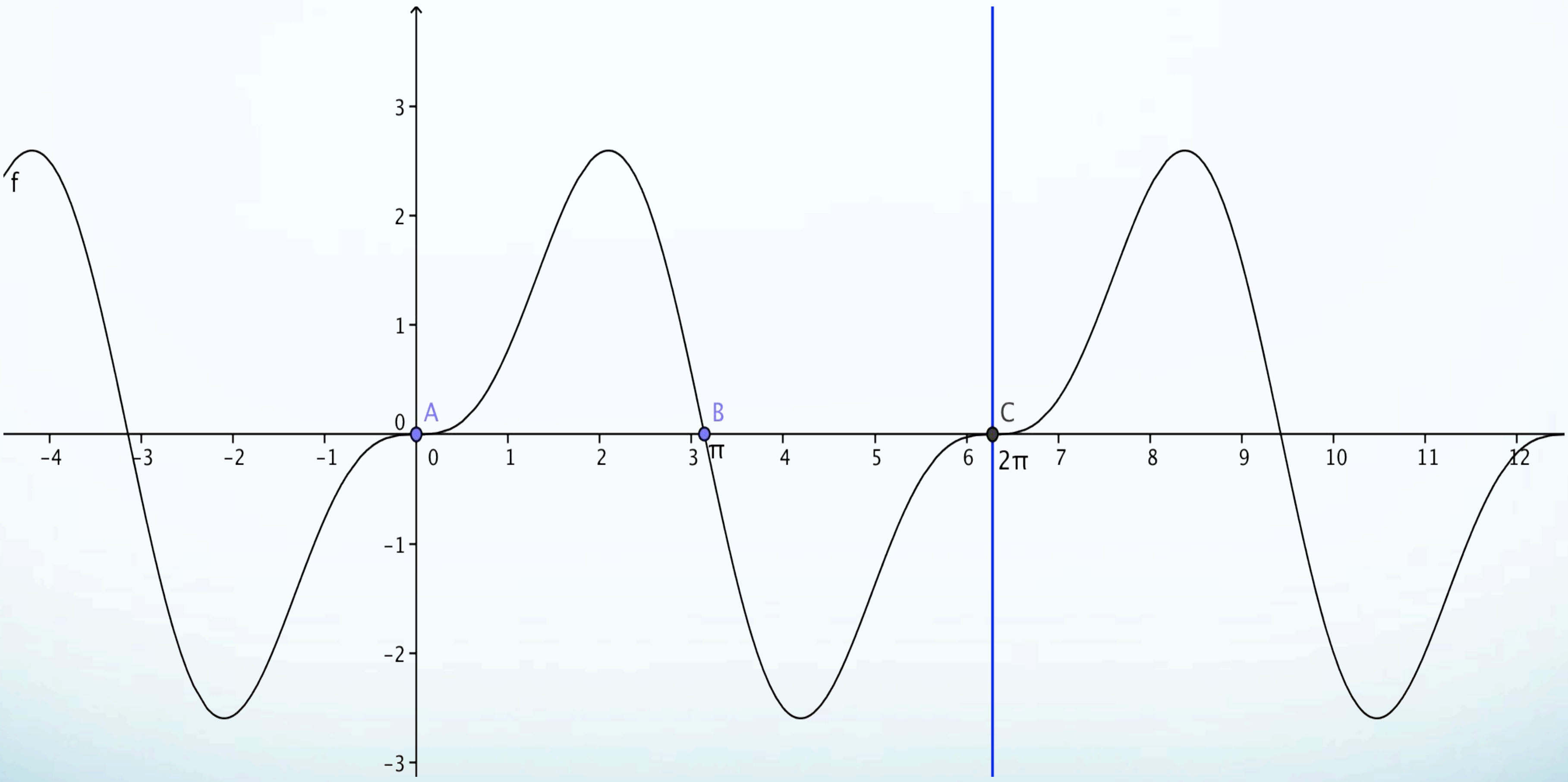
$f(x) > 0 \quad \cancel{2}\, sen\, x(1 - \cos x) > 0$

$F_1 > 0 \to sen\, x > 0 \to 0 < x < \pi$

$F_2 > 0 \to \cos x < 1 \to \forall x \in D$



grafico



$$y = \cos x + \frac{1}{2} sen 2x \qquad in\ [0;2\pi]$$

1) DOMINIO: $D = [0;2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases} \rightarrow (0,1) \in f(x)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\operatorname{sen} x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3/2\,\pi \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in f(x)$$

$$\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi \quad \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \in f(x)$$

Inoltre $f(2\pi) = 1 \rightarrow (2\pi, 1) \in f(x)$

3. Simmetrie

$$f(-x)=\cos(-x)+\frac{1}{2}sen(-2x)=\cos x-\frac{1}{2}sen2x\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

3) SEGNO :

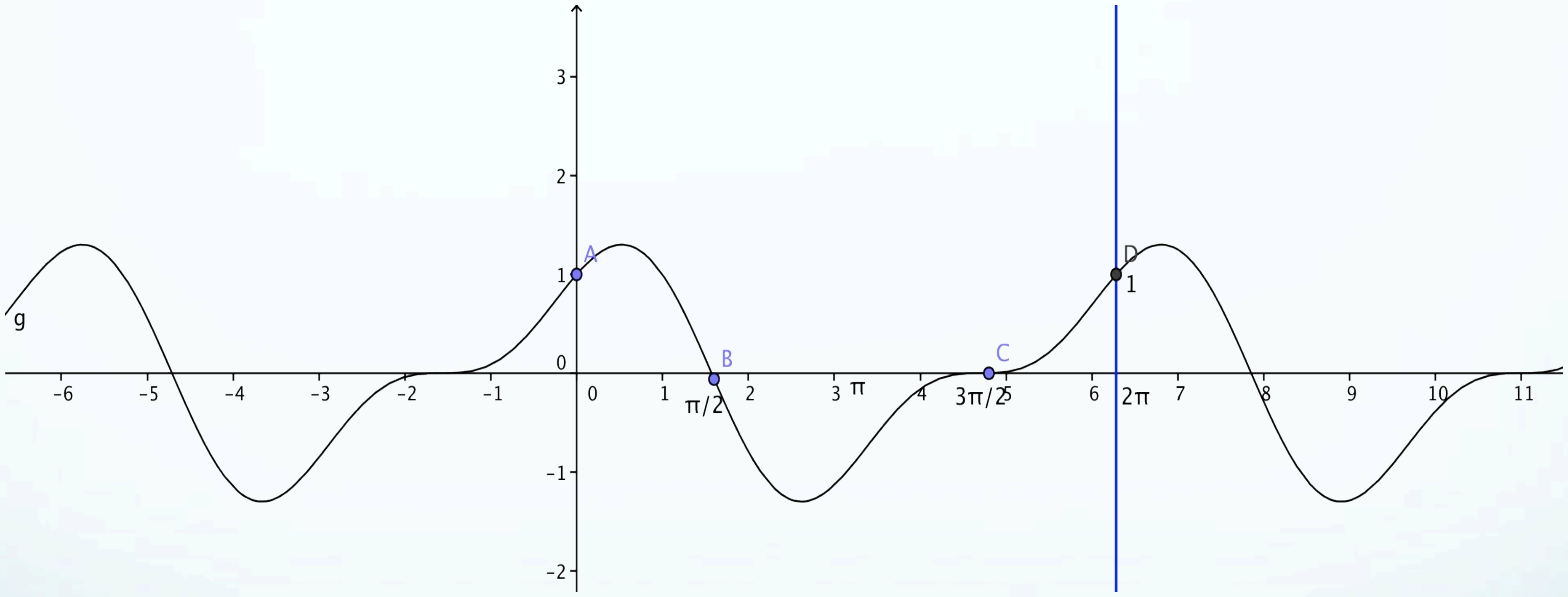
$f(x)>0 \qquad \cos x(\operatorname{sen}x+1)>0$

$F_1>0 \rightarrow \cos x>0 \rightarrow \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$

$F_2>0 \rightarrow \operatorname{sen}x>-1 \quad \forall x\in D$

		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π	
F_1			+		−		+		
F_2			+		+		+		
$f(x)$			+		−		+		

grafico



$$y = \frac{\cos x}{1 - \cos x} \qquad in\ [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO:

$1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 1 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases}$ $\qquad \mathbb{D} = (0; 2\pi)$

2) INT. CON GLI ASSI:

$x = 0 \notin f(x)$, $f(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in f(x)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \in f(x)$

3. Simmetrie

$$f(-x)=\frac{\cos(-x)}{1-\cos(-x)}=\frac{\cos x}{1-\cos x}=f(x)$$

La funzione è pari (oltre a essere periodica), quindi simmetrica rispetto all'asse y.

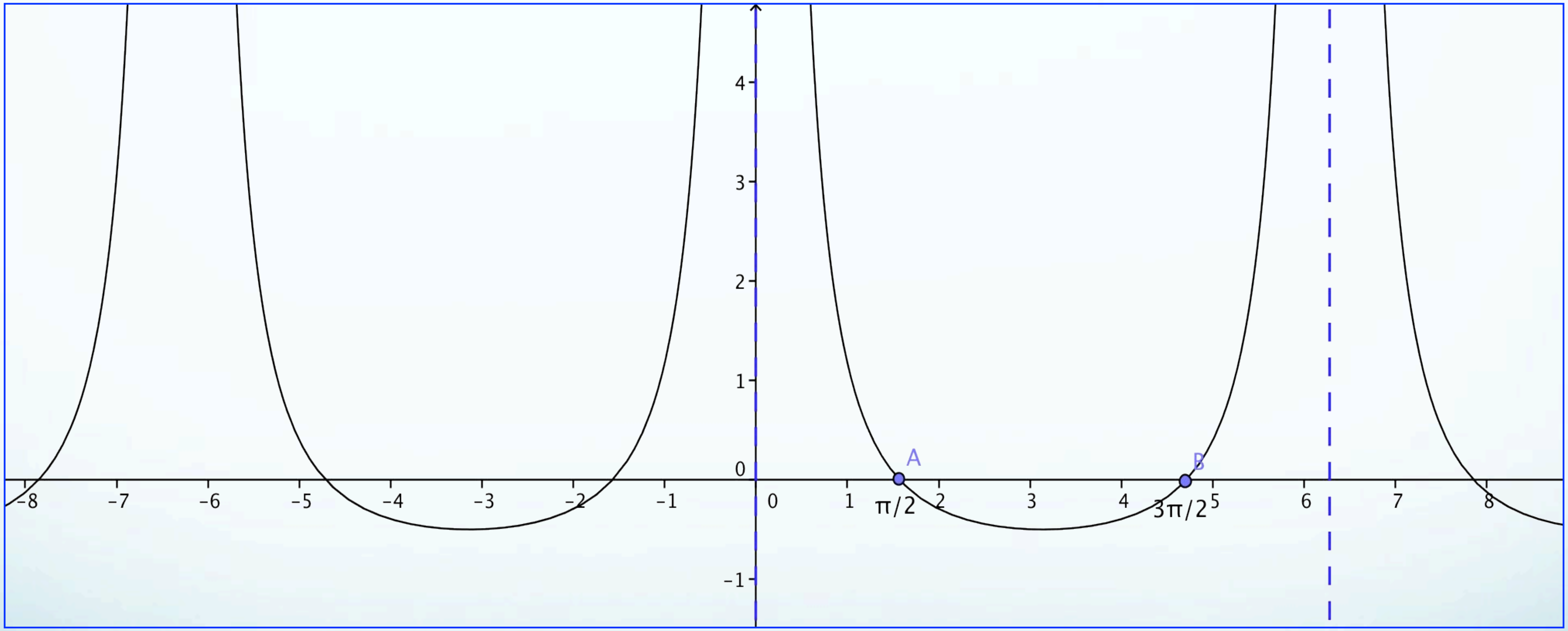
3) SEGNO :

$f(x)>0 \quad N>0 \to \cos x>0 \to [0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

$D>0 \to \cos x<1 \quad \forall x \in D$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
N		+		−		+	
D		+		+		+	
f(x)		+		−		+	

grafico



$$y=\frac{1+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen}x} \qquad in\ [0;2\pi]$$

1) DOMINIO:

$\cos x - \operatorname{sen}x \neq 0 \rightarrow 1-\operatorname{tg}x \neq 0 \rightarrow \operatorname{tg}x \neq 1$

$\rightarrow x \neq \frac{\pi}{4},\ x \neq \frac{5}{4}\pi \rightarrow \mathbb{D}=\left[0;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases} \rightarrow (0,2)\in f(x) \leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi\\y=2\end{cases} \rightarrow (2\pi,2)\in f(x)$

$\begin{cases}f(x)=0\\1+\cos x=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=0\\\cos x=-1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=0\\x=\pi\end{cases} \rightarrow (\pi,0)\in f(x)$

3. Simmetrie

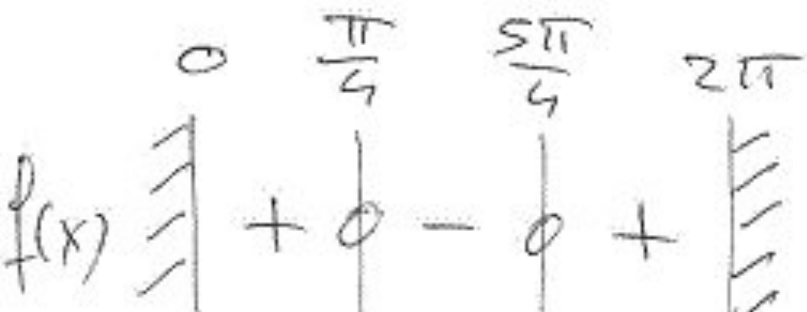
$$f(-x)=\frac{1+\cos(-x)}{\cos(-x)-sen(-x)}=\frac{1+\cos x}{\cos x-senx}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

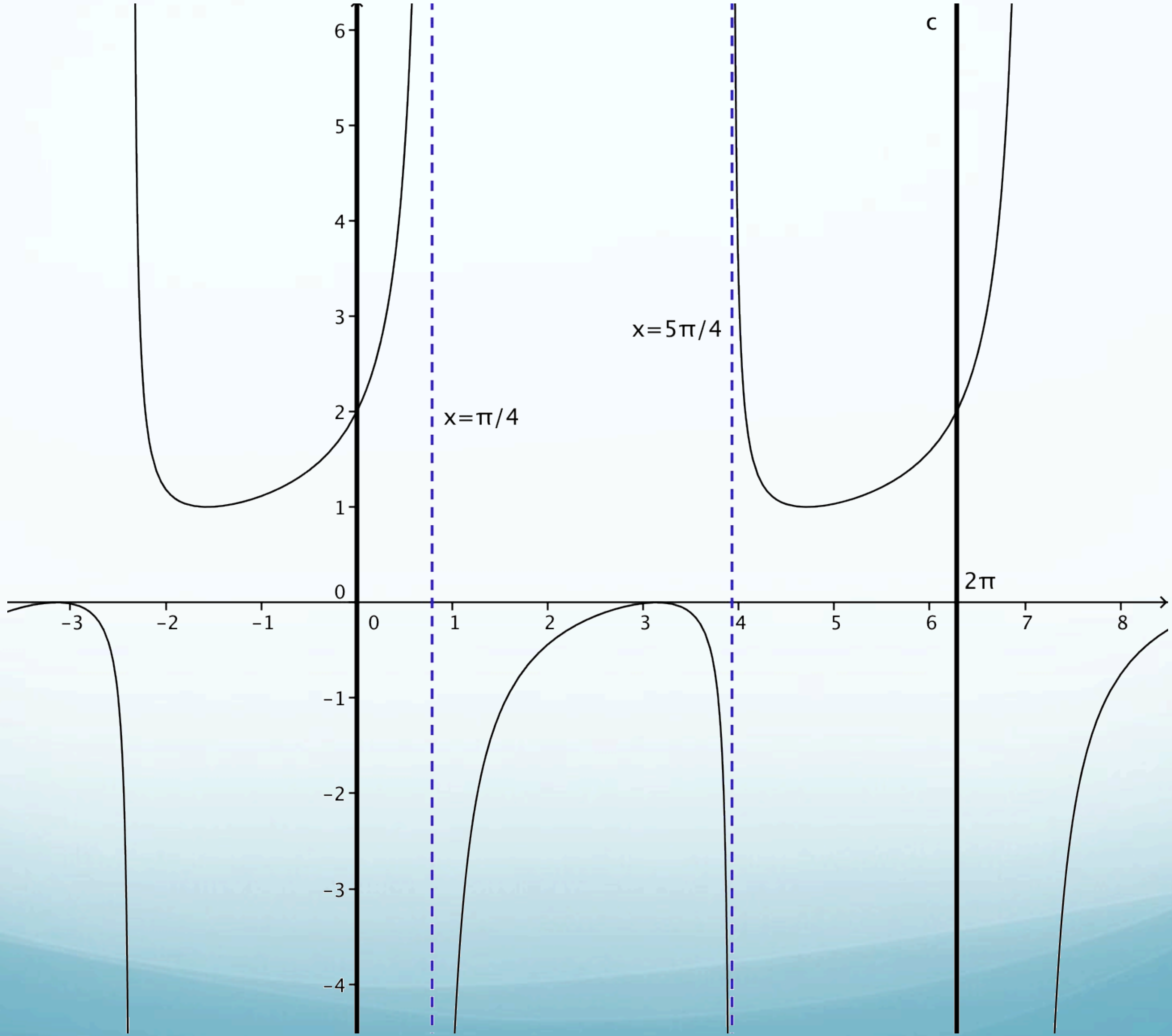
3) SEGNO:

$f(x)>0$ $\quad N>0 \to \cos x > -1 \quad \forall x \neq \pi$

$D>0 \to \cos x > sen\,x \to \left[0;\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4};2\pi\right)$



grafico



$$y = \frac{senx - \cos x}{\sqrt{3}senx - \cos x} \qquad in\ [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO: $\sqrt{3}\,sen x - \cos x \neq 0$

$\sqrt{3}\,tg x - 1 \neq 0 \rightarrow tg x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\nearrow x \neq \pi/6$, $\searrow x \neq \frac{7\pi}{6}$

$\mathbb{D} = \left[0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 1) \in f(x)$

$\begin{cases} x = 2\pi \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow (2\pi, 1) \in f(x)$

$\begin{cases} f(x) = 0 \\ sen x = \cos x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

$\left(\frac{\pi}{4}; 0\right) \in f(x)$

$\left(\frac{5\pi}{4}; 0\right) \in f(x)$

3) SEGNO:

$f(x)>0$

$N>0 \rightarrow \sin x > \cos x \rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

$D>0 \rightarrow \sqrt{3}\sin x > \cos x \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

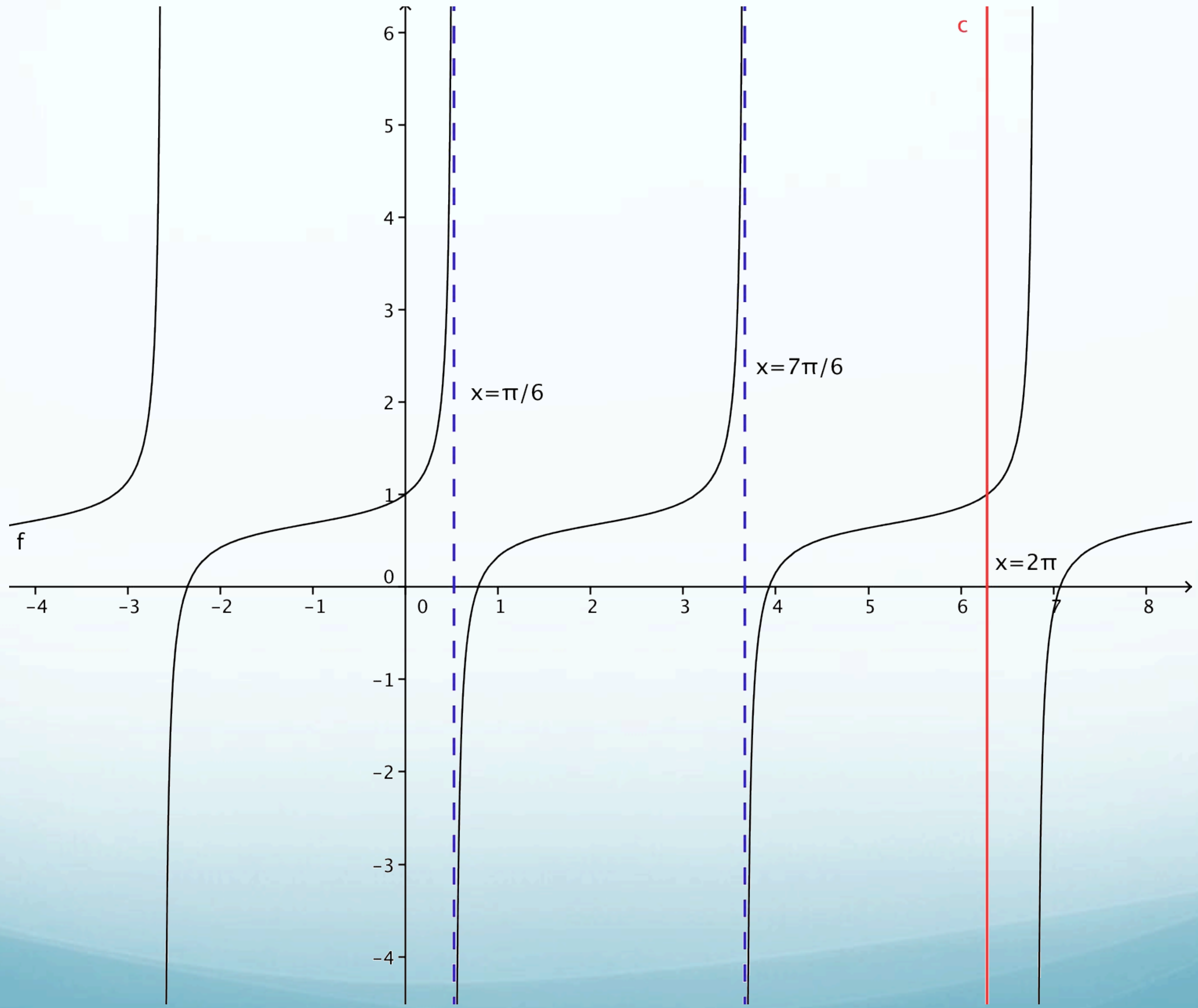
	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$7\pi/6$		$5\pi/4$		2π
N		$-$		$-$		$+$		$+$		$-$	
D		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$	
f(x)		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	

4. Simmetrie

$$f(-x)=\frac{sen(-x)-\cos(-x)}{\sqrt{3}sen(-x)-\cos(-x)}=\frac{-senx-\cos x}{-\sqrt{3}senx-\cos x}\neq f(x)\neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

grafico



$$y = 3sen^2x - 2sen^3x \qquad in\ \left[0;2\pi\right]$$

1) DOMINIO : $D = [0;2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=2\pi \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \underline{(0,0),\ (2\pi,0) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ sen^2x\,(3-2\,sen\,x)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=2\pi \\ sen\,x = 3/2 \rightarrow \varnothing \end{matrix}$$

$x=\pi \rightarrow \underline{(\pi,0) \in f(x)}$

3) SEGNO:

$$f(x) > 0 \rightarrow sen^2 x\,(3 - 2sen\,x) > 0$$

$$sen^2 x > 0 \quad \forall x \in (0; 2\pi)$$

$$3 - 2sen\,x > 0 \rightarrow sen\,x < 3/2 \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0; 2\pi)$$

4. Simmetrie

$$f(-x) = 3sen^2(-x) - 2sen^3(-x) = 3sen^2 x - 2sen^3(x) \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

3) SEGNO:

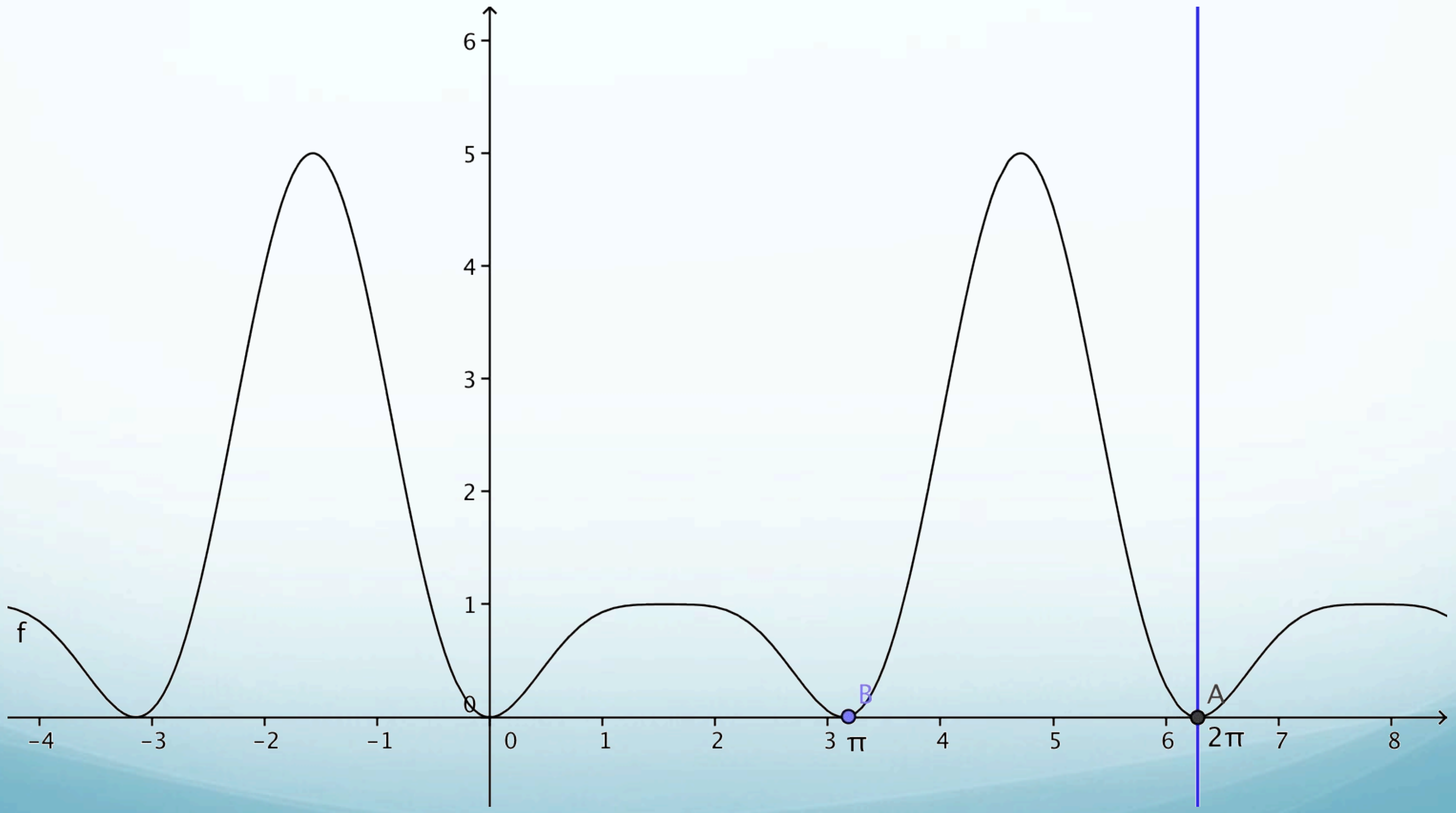
$$f(x) > 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x\,(3 - 2\operatorname{sen} x) > 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x > 0 \quad \forall x \in (0;2\pi)$$

$$3 - 2\operatorname{sen} x > 0 \rightarrow \operatorname{sen} x < 3/2 \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0;2\pi)$$

grafico



$$y = \frac{\cos^2 x}{1+2senx} \qquad in\ [0;2\pi]$$

1) DOMINIO: $1+2senx \neq 0 \rightarrow senx \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x \neq \frac{7}{6}\pi,\ x \neq \frac{11}{6}\pi \rightarrow \mathbb{D} = \left[0; \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi; 2\pi\right]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=2\pi \\ y=1 \end{cases} \rightarrow (0,1),\ (2\pi,1) \in f(x)$

$\begin{cases} f(x)=0 \\ \cos^2 x=0 \end{cases} \rightarrow x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2},0\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right) \in f(x)$

3) SEGNO:

$f(x) > 0$

$N > 0 \rightarrow \cos^2 x > 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$

$D > 0 \rightarrow sen x > -\frac{1}{2} \rightarrow \left[0; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
N		+		+		+		+		+	
D		+		+	0	−		−	0	+	
f(x)		+		+	0	−		−	0	+	

5. Simmetrie

$$f(-x) = \frac{\cos^2(-x)}{1+2sen(-x)} = \frac{\cos^2 x}{1-2senx} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

grafico